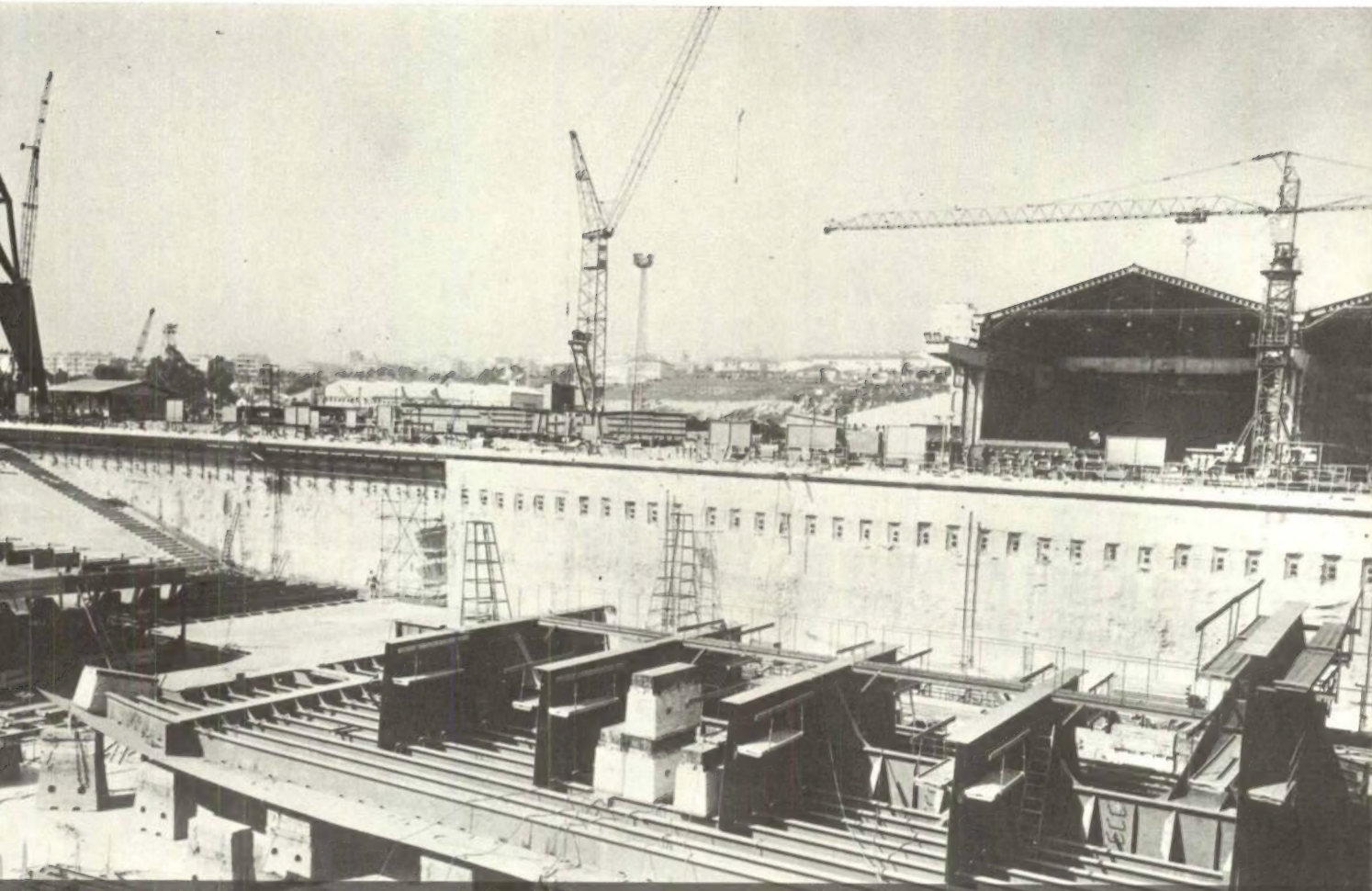
# técnica



404 associação dos estudantes do instituto superior técnico
janeiro 1971 revista de engenharia

**VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40**
**(«Heliaço» e «SNT 40»)**

**TENSÕES DE SEGURANÇA**
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

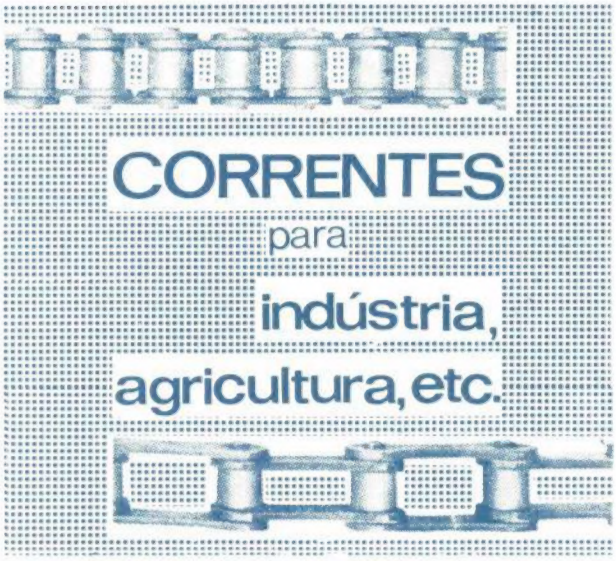
**Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente**

**HELIAÇO, LDA.**

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

**Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77**

REGINA-EXTRA
**REX-REGINA**




AUTO~LUSITANIA
ALFREDO DUARTE, L.da
**AVENIDA DA LIBERDADE, 73-77**
**LISBOA**

**UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA**
S. A. R. L.

SEDE
**Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO**
TELEFONES: 2 76 76/9 e 2 18 38

DELEGAÇÃO
**Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA**
TELEFONES: 53 11 81/7 e 53 33 33

•

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

•

A UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA, S. A. R. L. distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal, (cerca de 3 500 km) energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

**CIMENTO SECIL**

**Fábrica:**
Outão — Setúbal
**Telef. 228824/5**

**Escritório:**
R. do Comércio, 56-3.º
**LISBOA 2**
**Telef. 328201/2/3**

# técnica

*NÚMERO 404 JANEIRO DE 1971 ANO XLVI VOLUME XXXIII PUBLICAÇÃO MENSAL*



**Director**

Silvério de Sousa Mendes

**Administrador**

Vladimiro de Oliveira

**Secretário**

Raul Pereira da Costa

**Chefe de Redacção**

Guilherme Silva Arroz

**Redactores**

Alvaro Manuel Cortez
Antonio Mouraz
Francisco Toco Emílio
José de Oliveira Paulo
Rui Lopes dos Santos



**Assinaturas**

| | | 5 Nos. | 10 Nos. |
|---|---|---|---|
| Continente e Ilhas | — | 85$00 | 160$00 |
| Ultramar, Brasil e Espanha | — | 95$00 | 170$00 |
| Estrangeiro | — | | 180$00 |

**Número avulso — 25$00**

Não se publica em Agosto e Setembro.

**Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.**

*Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 108 — Lisboa*


# SUMÁRIO


**167** *MANUEL ROCHA* — **Método para amostragem integral de maciços rochosos.**

Sampling method of the rock masses.

**177** *A. M. R. MARRECAS* — **Inversão numérica de transformadas de Laplace.**

Numerical inversion of Laplace transforms.

**181** *DUARTE-RAMOS* — **Descrição de sistemas nos domínios do tempo, imagem e complexo através do regime de transferência e do estado dinâmico.**

The description of systems in the domain of time, image and complex by means of the transfer regime and the dynamic state.

**193** *J. SARAFANA* — **Tratamento de resíduos.**

Aproaches for handling wastes.

**199** *P. MARTINS DA SILVA* — **Determinação da condutibilidade térmica em regime variável.**

Determination of the thermal conductivity in non-steady-state

**203** *GOMES SAMUEL* — **Fundações especiais com paredes moldadas no solo.**

Special foundations by the sistem of continuous walls.

**220** **Do Mundo Técnico**

**Bibliografia**

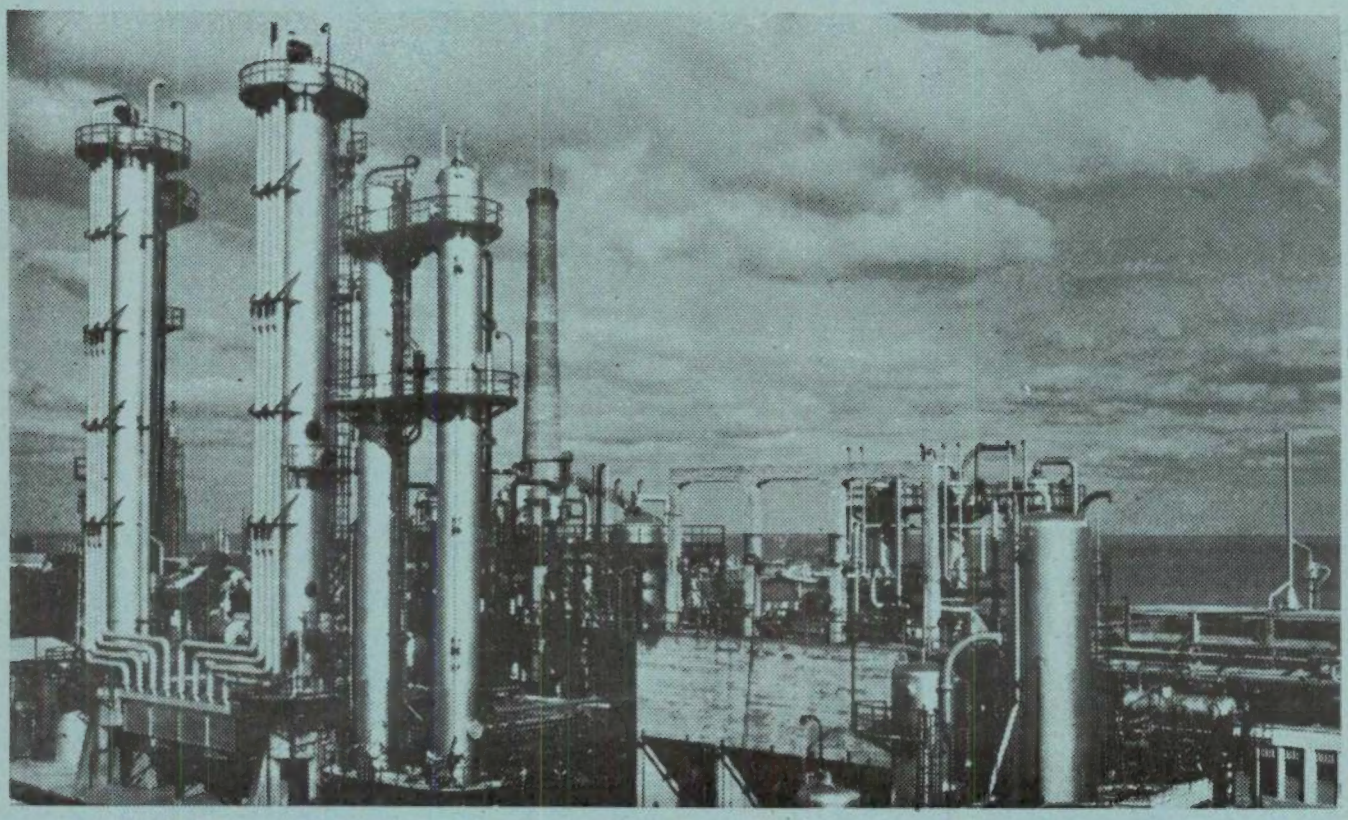

**CAPA:** LISNAVE — Doca n.º 10 — Panorâmica da parede moldada no solo executada no lado Poente da doca — Sondagens Ródio, Lda. (Foto Silvano).

# INDICE ALFABETICO DOS ANUNCIANTES


| | Pág. |
|---|---|
| A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. | XXXII |
| Auto-Lusitânia | 2.ª da capa |
| Atlas-Copco | XXVI |
| Cimento Secil | 2.ª da capa |
| Companhia de Cimentos Brancos | VI |
| Cometna | XXVII |
| Construções Técnicas | XVII |
| Construções Schréder | XX |
| Electrotécnicos Reunidos | XXV |
| Electro-Arco, Lda. | II |
| Empresa de Cimentos de Leiria | X |
| Empresa Electro Cerâmica | XXIX |
| Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda. | 3.ª da capa |
| Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos | XI |
| Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações | XVI |
| Engil | XXXI |
| Fanafel | XVI |
| Fundações Franki, Lda. | I |
| Guedes & Almeida, Lda. | IV e VIII |
| Harker Sumner | XXVIII |
| Heliaço | 2.ª da capa |
| Isola | XXVI |
| Isolux | IV |
| Jayme da Costa, Lda. | XIX |
| Johann Keller | XXVII |
| J. F. Azevedo e Silva | VII |
| J. Roma | V |
| Livros Técnicos | V e XXXVI |
| MAGUE | XIII |
| Mendes de Almeida, S. A. R. L. | XXI |
| Mobil Oil | XVIII |
| Novobra, Lda. | XXVII |
| Philips Portuguesa | XXIV |
| Romar | XV |
| Siemens | XII |
| Soc. Electricidade Brown Boveri | 4.ª da capa |
| Soc. Amadeu Gaudêncio | XXIX |
| Soc. Industrial Metalúrgica | XXIX |
| Sociedade Portuguesa Cavan | VI |
| S. K. F. Lda. | XXII |
| Sondagens e Fundações A. Cavaco | II |
| Sondagens Ródio, Lda. | V |
| Sopecate | II |
| Standard Eléctrica | IX |
| Tudor | XXIII |
| União Eléctrica Portuguesa | 2.ª da capa |
| Wild Portugal, Lda. | III |

espiral

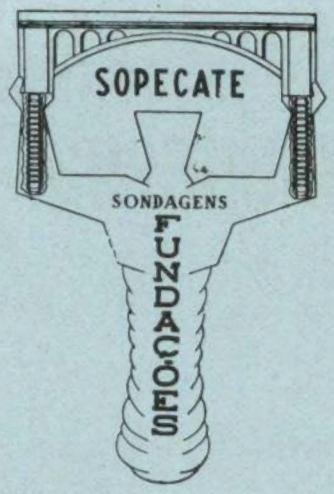
# na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.



A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

**FRANKI**

**Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL**




# sopecate

sondagens - fundações

**ESCRITÓRIO:** RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS GEOLÓGICAS

• REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

**SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.**

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 56 11 71/72/73

# ELECTRO-ARCO, L.DA

**ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS**
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

Temos apenas uma qualidade:
Primeira.
WILD
HEERBRUGG
SWISS
Os estojos de desenho WILD são confeccionados de aço crômio polido inoxidável.
Isto significa precisão, mesmo após uso de longos anos.
Um exemplo da mais alta perfeição: O traçado direito e preciso do compasso WILD. O mesmo possibilita um trabalho seguro. A posição do ângulo pode ser fixada com rapidez e segurança sem a mínima folga nas pernas do compasso.
A aplicação de materiais sòmente da melhor qualidade e o máximo cuidado no acabamento, justificam a reputação mundial de primeira qualidade, Made in Heerbrugg.
WILD
HEERBRUGG
Aparelhos para Fotogrametria
Aparelhos topográficos
Microscópios

ESCAVADORAS HIDRÁULICAS
S/RODAS — S/LAGARTAS

— ENTREGAS IMEDIATAS

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA, LDA.

RUA ÁUREA, 181 - 2.º — TELEFONES 325011 - 327845 — LISBOA

ISOLUX L.DA

ESTUDOS E INSTALAÇÕES ELÉCTRICAS

Porto

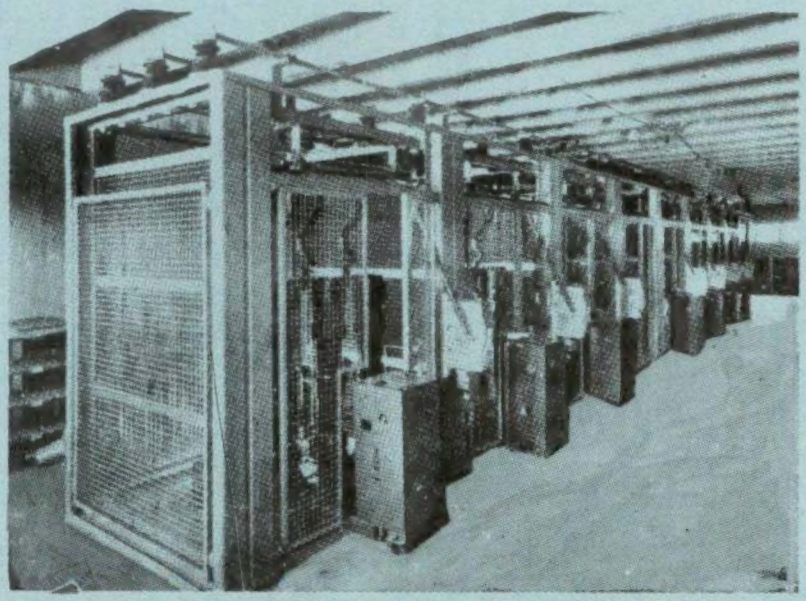
R. Dr. Alfredo Magalhães, 110 - 2º. Dtº.

Tel. 20723

Lisboa

L. Campo Pequeno, 21 - 4º Esq

Tel. 770030/8/9



CELAS ABERTAS DE ALTA TENSÃO

Projectos e instalações eléctricas de:

Centrais

Subestações

Postos de Transformação

Fábricas

Edifícios públicos

Blocos residenciais

## Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

### Matérias

— Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
— Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
a) com armadura de compressão reduzida
b) com armadura de tracção reduzida
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Flexão simples de secções T duplamente armadas
— Compressão simples
— Flexão composta de secções rectangulares
a) com armadura simétrica
b) com armadura de tracção reduzida
c) com armadura de compressão reduzida
— Flexão composta desviada de secções rectangulares
— Flexão composta de secções em T
a) com armadura de tracção reduzida
b) comarmadura de compressão reduzida
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
— Esforço transverso

**Preço 150$00**

---

## Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

### Matérias

— Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
— Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas

**Preço 60$00**

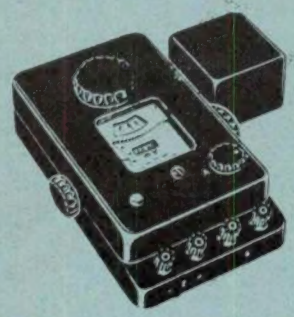
**Por J. M. MADEIRA COSTA**

ENG.º CIVIL

**À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS**


• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO



**Aparelhagem de medidas eléctricas**

+ indicadora
+ reguladora
+ registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151
P. do Município, 309-6.º S 3 PORTO Tel. 0236732



SONDAGENS RODIO, LDA.

R. S. Bento, 644 - 3.º
LISBOA

TELEFONE: 68 80 96

PORTO
LUANDA
BEIRA

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ESTACAS
PAREDES CONTÍNUAS
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS

# O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

**permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos**

**Estude a vantagem do emprego do**

## CIMENTO BRANCO LUSO

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa

No Norte: **SCIAL** — R. António Feliciano de Castilho, 1126 — Telef. 97 09 32 — Areosa — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS

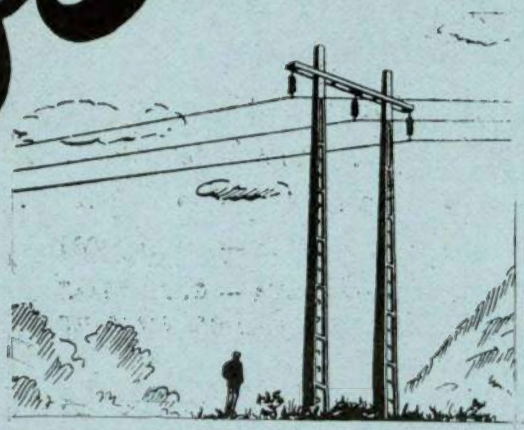
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA

MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA

Carvam



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 - TELEF. 47812-50129

"Divisão de Texteis" LOJA dos Restauradores

PROJECTO PROFABRIL

JF

EXECUTOU A INSTALAÇÃO ELÉCTRICA DE

- ILUMINAÇÃO
- AR CONDICIONADO

FORNECENDO E INSTALANDO TAMBEM

- 3 QUADROS GERAIS
  iluminação ar condicionado reclame luminoso
- 2 QUADROS PARCIAIS
  iluminação

lâmpadas especiais DURO TEST® tom de luz "OPTIMA"*

* REPRODUÇÃO CROMÁTICA DA LUZ DA NATUREZA

JF

J. F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA

Rua S. Francisco de Sales, 2 1.º andar, Tel. 654165 — Lisboa

Impar

WABCO
An American-Standard Company

# MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADES ATÉ 34 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.° — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

# A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Electrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 paises, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 paises entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

**Standard Eléctrica** **ITT**

TG

# BETÃO LIZ

FORNECIDO NO LOCAL DAS OBRAS
COM A COMPOSIÇÃO REQUERIDA
E NA HORA EXACTA.

SERVIÇO EFICIENTE.

COBERTURA TOTAL DO MERCADO.

UM PRODUTO DA DIVISÃO DE BETÃO

DA

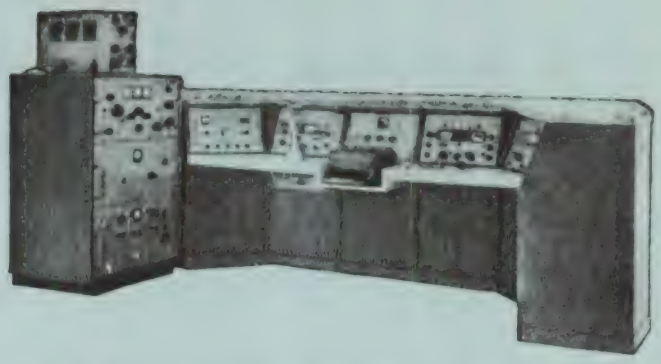
EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA

S. A. R. L.

CENTRAIS EM LISBOA E PORTO

LISBOA:
Tels. 31 30 31/32

PORTO:
Tels. 95 13 23/24



## Comunicações

**equipamentos**
**e sistemas completos**

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

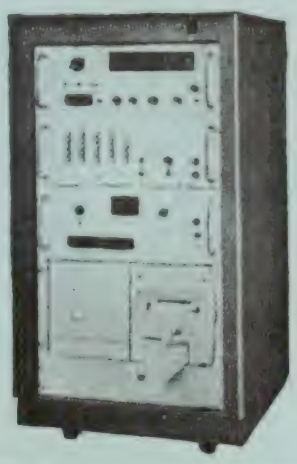
**THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION**

**HEWLETT hp PACKARD**

**aparelhagem electrónica de medida e registo**

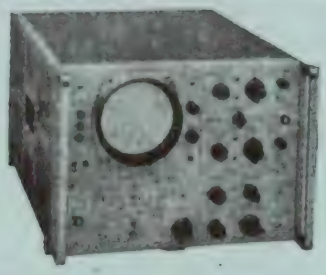
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn

Osciloscópio HP



Contador Electrónico HP

**TELECTRA** EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

SIEMENS

6170

# Disjuntor Siemens de corrente de defeito

### Protege pessoas e animais

- contra tensões de contacto excessivamente elevadas, em aparelhagem deficientemente isolada
- em casos de troca do condutor principal pelo condutor de protecção, ou ainda, troca entre o condutor de protecção e o neutro
- duma maneira geral, portanto, sempre que uma corrente perigosa passa, através do corpo de pessoas ou de animais, à terra

### Garante

- grande protecção humana
- em caso de terra fraca, uma supersensibilidade **(dispara para correntes de defeito entre 15 e 30 mA segundo prescrições VDE 0100 e dentro de 30 ms)**
- elevado poder de corte
- longa duração, cerca de 20.000 manobras à corrente nominal

### Aplica-se

como interruptor geral em habitações, hospitais, oficinas, fábricas, instalações provisórias, obras e em todos os casos em que haja elevado grau de humidade ou deficientes condições de isolamento.

Exponha os seus problemas especiais à secção técnica da
Siemens-Companhia de Electricidade, SARL
Av. Almirante Reis, 65-tel. 536921-Lisboa 1
R. das Carmelitas, 26-2.º - Tel. 28943 - Porto

# O melhor sistema de protecção humana

TECNICA XII

técnica

NUMERO 404 JANEIRO DE 1971 ANO XLVI VOLUME XXXIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 624.131.25 : 624.131.36

# MÉTODO PARA AMOSTRAGEM INTEGRAL DE MACIÇOS ROCHOSOS

por MANUEL ROCHA
Director, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa

RESUMO

*É apresentado novo método de amostragem com o qual é possível obter tarolos que representam a totalidade dos maciços rochosos, incluidas as fracturas de qualquer natureza e os seus enchimentos, assim como zonas de muito fraca resistência. Além disso, os tarolos obtidos são orientados.*

*Os tarolos permitem a determinação das propriedades do maciço rochoso, em particular das fracturas e enchimentos.*

SYNOPSIS

*A new sampling method is presented which yields core samples representative of the whole rock mass, including fractures of any nature and their infillings, and also of the zones with very low strength. Additionally the core samples are oriented.*

*By means of the core samples it is possible to determine the properties of the rock mass, particularly of fractures and infillings.*

## 1. INTRODUÇÃO

Apesar de já há muito tempo ser reconhecido o papel primordial desempenhado pelas diaclases, falhas e outras fracturas no comportamento dos maciços rochosos, o facto é que até hoje não foi possível, que saibamos, desenvolver técnica de amostragem em furos de sondagem que permitisse obter informação satisfatória sobre as características dessas discontinuidades, em particular dos seus enchimentos. De um modo geral, a amostragem que se consegue não é representativa das zonas de menor resistência, afinal aquelas que mais influenciam a deformabilidade e a resistência dos maciços rochosos. Na prospecção mineira o conhecimento das fracturas e seus enchimentos e de zonas de fraca resistência é também muitas vezes de importância capital.

É situação corrente serem despendidas somas avultadas em trabalho de sondagem sem se conseguir obter as informações necessárias, o que cria muitas vezes verdadeiro sentimento de frustração. No caso de estar em jogo o comportamento mecânico, como os tarolos obtidos são representativos das zonas de melhor qualidade, as sondagens conduzem mesmo por vezes a um julgamento optimista das características do maciço, o que pode acarretar as mais graves consequências.

As dificuldades que se acabam de apontar levaram ao desenvolvimento de diversas técnicas de observação das paredes dos furos de sondagem, por meio de periscópios e câmaras fotográficas e de televisão. Essas técnicas apresentam contudo severas limitações quer quanto à natureza e qualidade da informação obtida quer às condições de utilização.

Em face da presente situação fomos conduzidos a procurar um método de amostragem que permitisse obter amostras intactas integrais, isto é, representativas da totalidade do maciço rochoso,

o que na nomenclatura habitual se pode exprimir por uma percentagem de recuperação de 100 %. O método desenvolvido fornece ainda a orientação das amostras.

## 2 — NOVO MÉTODO DE AMOSTRAGEM DESENVOLVIDO

O novo método de amostragem consiste essencialmente em obter tarolo do maciço rochoso prèviamente armado por meio de varão o qual assegura a solidariedade e a integridade do material extraído. O método poderá ser aplicado ao longo de todo um furo de sondagem ou sòmente nas zonas onde as condições do maciço ou as exigências da obra a construir aconselhem a sua utilização.

As operações a efectuar para a obtenção de amostras integrais orientadas são as seguintes:

a) *Abertura do furo de sondagem* (Fig. 1 a). É aberto furo de sondagem, com a inclinação desejada, até à profundidade a partir da qual se pretende

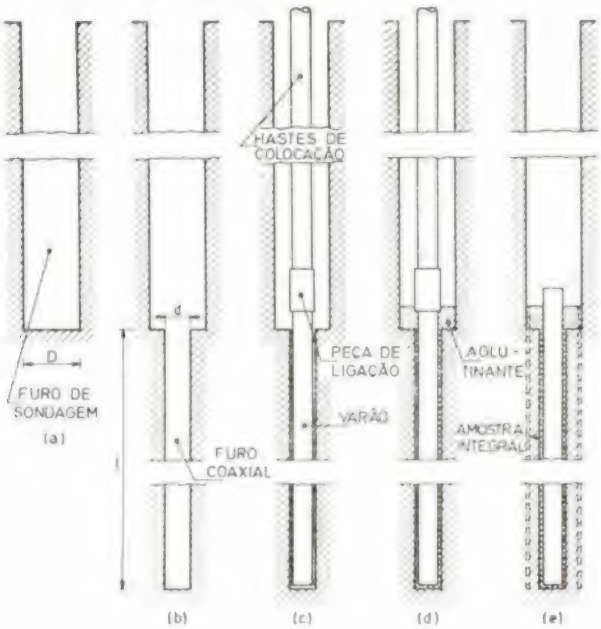



Fig. 1

fazer a amostragem integral. O diâmetro $D$ do furo será o adequado ao diâmetro do tarolo que se deseja obter. Temos sobretudo adoptado o diâmetro de 7,5 cm, comum nos trabalhos de prospecção, mas já se foi até 17 cm.

b) *Abertura do furo para alojamento do varão* (Fig. 1 b). No fundo do furo anteriormente referido é aberto furo coaxial com diâmetro de comprimento $l$ igual ao do tarolo a obter. Convém que o diâmetro $d$ seja pequeno com vista a aumentar a espessura da amostra armada, mas por outro lado é necessário que o furo permita alojar varão com rigidez que evite deformações inconvenientes do tarolo no decorrer das operações, adiante referidas, de sobrecarotagem, de extracção do amostrador e de colocação nas caixas de acondicionamento. Para furos de sondagem com $D = 7{,}5$ cm tem sido usado com maior frequência o valor $d = 2{,}6$ cm, o que conduz a tarolos com uma espessura de cerca de 1,7 cm. Quanto ao comprimento $l$ do furo, convém que seja grande a fim de reduzir o número de operações de amostragem para um mesmo comprimento total, e portanto o custo do trabalho. O valor de $l$ é por outro lado limitado pelo risco de, na operação de sobrecarotagem, se verificar desvio exagerado na coaxialidade dos dois furos, podendo mesmo vir a ser interceptado o varão de reforço. Temos até agora obtido sobretudo tarolos com o comprimento de 1,5 m mas não prevemos que, na maior parte dos casos, haja dificuldade em ir bastante além deste valor.

O furo para alojamento do varão pode ser aberto com coroa de diamante de tipo habitual ou com coroa de secção cheia. O primeiro tipo tem a vantagem de se obterem tarolos e portanto uma primeira informação sobre o maciço rochoso que pode ter utilidade para a condução das operações subsequentes de obtenção da amostra integral. Por outro lado, usando coroas de secção cheia está-se menos sujeito ao risco de a coroa se encravar e de ao ser retirada ficar quantidade apreciável de detritos no fundo do furo.

A coaxilidade do furo em relação ao furo de maior diâmetro é obtida por meio de guia que se apoia na parede deste último furo.

c) *Colocação do varão*. No furo de diâmetro $d$ é introduzido o varão destinado a reforçar o maciço rochoso (Fig. 1 c). O varão é colocado por meio de hastes, convenientemente guiadas, que permitem definir-lhe a orientação. Para ligar o varão ao maciço é injectado aglutinante, através das hastes e do próprio varão, que também é furado (Fig. 1 d). A ligação do varão às hastes permite que estas sejam retiradas antes de o

aglutinante endurecer, o que é necessário em virtude de o aglutinante poder envolver a peça de ligação e portanto dificultar a actividade das hastes após endurecimento.

Têm sido usados varões furados de aço e, por vezes, de outros materiais, com um diâmetro diferindo de alguns milímetros de diâmetro do furo, por exemplo 5 mm. Como aglutinante têm sido usadas sobretudo caldas de cimento mas também foram experimentadas resinas epóxido. A fim de melhorar a sua resistência, utilizam-se caldas de cimento com uma relação água-cimento tão baixa quanto seja compatível com o escoamento do aglutinante no espaço entre o varão e a superfície do furo. É corrente usar relações de cerca de 0,4. O aglutinante é colocado num reservatório (Fig. 2) donde sai, através de tubo de plástico ligado às hastes de colocação do varão, mediante a aplicação de ar sob pressão. Quando se deseje evitar que o aglutinante penetre no maciço rochoso é aconselhável ir levantando o varão à medida que o furo vai sendo preenchido e depois levar o varão lentamente à sua posição. Convém usar aditivos para regulação do tempo de endurecimento do aglutinante, com vista à economia da operação de amostragem. Também é por vezes conveniente adicionar corantes a fim de ser facilitada a distinção entre o aglutinante e o restante material quando da observação dos tarolos.

A fim de evitar que nos espaços preenchidos com o aglutinante entre água do terreno que prejudique a ligação do varão, é aconselhável que no decorrer do endurecimento a altura da água no furo de sondagem não seja inferior à correspondente à pressão da água intersticial do maciço rochoso na zona da amostragem.

d) *Sobrecarotagem* (Fig. 1 e). Após o aglutinante ter atingido o grau de endurecimento necessário procede-se à sobrecarotagem da zona armada do maciço rochoso. É conveniente organizar as operações de modo que o endurecimento se processe no decorrer da interrupção nocturna dos trabalhos de sondagem. A sobrecarotagem deve ser feita com os cuidados habituais, sendo conveniente usar coroa de pequena espessura a fim de ser maior a espessura da amostra. Têm sido obtidos resultados inteiramente satisfatórios mesmo usando extractor simples. No caso de

Fig. 2

maciços de muito má qualidade pode ser aconselhável a utilização de amostrador duplo.

Quanto aos reforços a que se encontra submetido o aglutinante que preenche o espaço entre o varão e o maciço rochoso, nota-se que são em regra diminutos pois as acções que o extractor

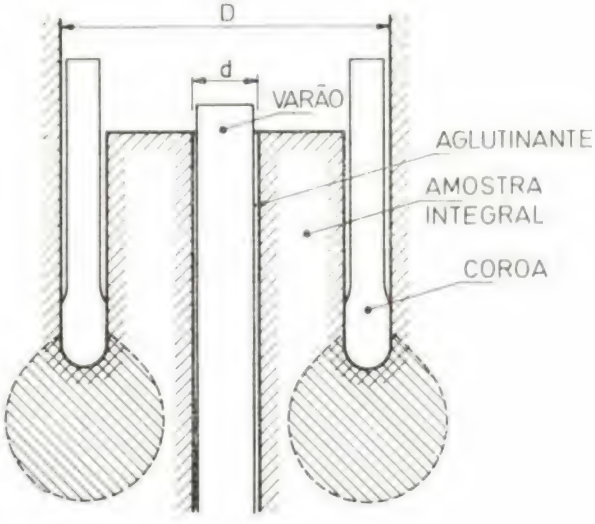



Fig. 3

exerce sobre o maciço se concentram num bolbo tal como o indicado na fig. 3. O aglutinante terá sobretudo de suportar solicitações secundárias, em especial as provenientes de vibrações, a não

ser quando ocorrem fendas no maciço rochoso com certas orientações. Assim, no caso de fenda aberta perpendicular ao varão (Fig. 4) as solicitações aplicadas pela coroa podem transmitir-se em grande parte à ligação do varão ao maciço rochoso. Além disso, quando a coroa se aproxima da fenda pode destacar-se, como já temos observado, o volume de rocha indicado na fig. 4, em consequência do desenvolvimento de tensões de tracção. Para atenuar este fenómeno poderá ser necessário reduzir a força axial aplicada na sobrecarotagem.

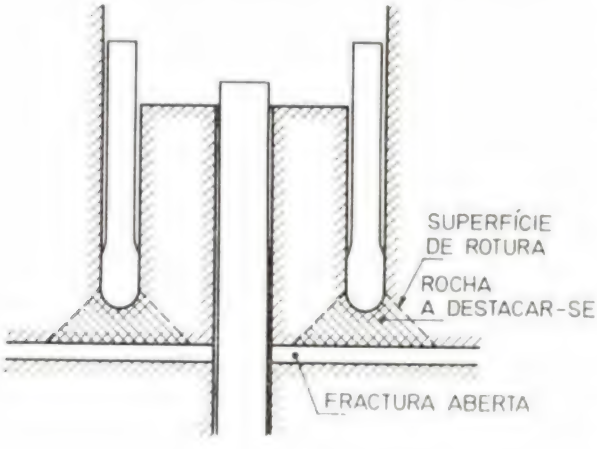



Fig. 4

## 3. APLICAÇÃO DO MÉTODO EM LABORATÓRIO

O método foi aplicado em laboratório com vista a julgar a sua viabilidade e a definir as melhores condições da sua utilização.

Para isso foram simulados maciços rochosos mediante a sobreposição de camadas de rochas de diversas naturezas e com espessuras de 1 a 20 cm. Entre essas camadas eram deixados intervalos com dadas espessuras, variando desde 0 a 10 mm, os quais em certos casos foram deixados abertos e noutros preenchidos com materiais siltosos e argilosos de diversas consistências, reproduzindo os enchimentos que ocorrem na Natureza. Essas camadas eram montadas em tanques (Fig. 5) e depois procedia-se à extracção de amostras integrais, mediante a abertura de furo para alojamento do varão, a introdução deste e do aglutinante, e a sobrecarotagem. As amostras eram colhidas perpendicularmente às camadas, por ser esta a direcção mais desfavorável.

No respeitante à operação de amostragem foram numerosos os aspectos estudados: tipo de coroa e extractor adequado à abertura do furo para o varão, material do varão, intervalo entre o varão e o furo, centragem do varão, tipo de aglutinante, em particular a sua consistência, velocidade de introdução do varão no furo preenchido com aglutinante, aditivos para regulação da evolução do endurecimento e para coloração do aglutinante, e finalmente o tipo de coroa e extractor para a sobrecarotagem e condição da sua utilização. A técnica que aconselhamos para a aplicação do método, exposta na secção 2, é o resultado destes estudos.

Na fig. 6 apresenta-se, na parte superior, amostra integral obtida em laboratório, em furo com diâmetro 7,5 cm aberto com extractor simples. A solidarização foi obtida por meio de varão de plástico e calda de cimento. Podem observar-se as camadas de rochas de diversa natureza e o seu diferente espaçamento. Os intervalos estavam preenchidos com materiais argilosos, verificando-se que mesmo camadas pràticamente isentas de coesão se mantiveram em grande parte na amostra integral. Para comparação, apresentam-se na parte média da fig. 6 os tarolos obtidos num furo com o mesmo diâmetro aberto junto do anterior, com a técnica corrente de amostragem, com extractor duplo. A percentagem de recuperação, determinada como é habitual, foi de 89%, não se tendo conseguido pràticamente recuperar nenhum dos enchimentos e, além disso, algumas das camadas de rocha sofreram, como se vê na figura, fracturação apreciável. Na parte inferior

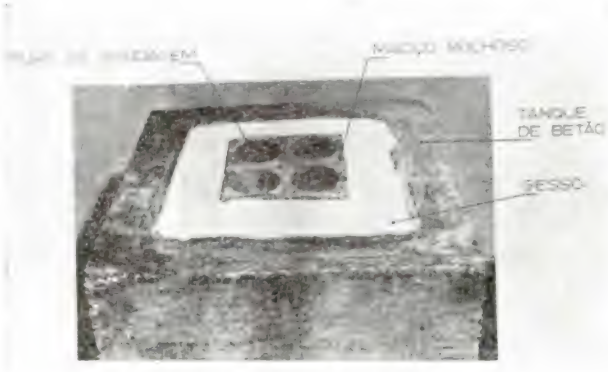



Fig. 5

da fig. 6 vêem-se ainda os tarolos obtidos na abertura do furo, com diâmetro de 2,2 cm, para alojamento do varão, a qual foi feita com extractor simples. A recuperação foi sòmente de 75 %.

superfícies cortadas permitem uma «leitura» perfeita de todas as fracturas e seus enchimentos. No caso em consideração as juntas encontravam-se abertas e por isso foram preenchidas com o aglutinante.

Fig. 6

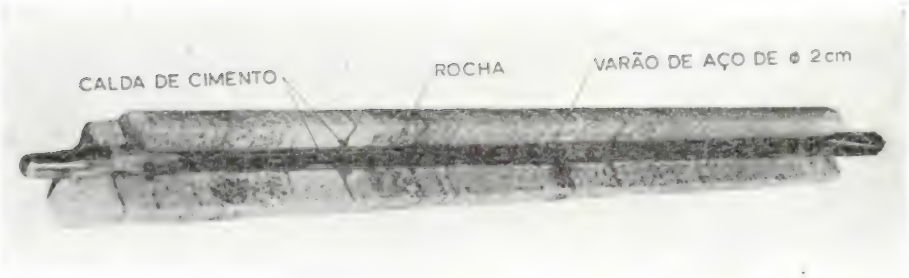



Fig. 7

Na fig. 7 vê-se tarolo obtido também em laboratório, em furo com 7,5 cm de diâmetro, cortado longitudinalmente, por meio de disco diamantado, ao longo de duas secções radiais, como se está fazendo habitualmente para melhorar as condições de observação. Na verdade, as duas

## 4. APLICAÇÕES NO CAMPO

Após o estudo do novo método em laboratório foi empreendido um programa de aplicações no campo, sobretudo em maciços rochosos que exibem condições mais desfavoráveis, com vista

a definir as melhores técnicas de aplicação tendo em atenção a economia da amostragem.

O método foi aplicado em furos com diâmetros desde 7,5 cm até 17 cm, em regra em furos verticais, já tendo porém sido usado em furos com a inclinação de 45°, e quanto a profundidade, apesar de ainda só termos tido oportunidade de colher amostras até 15 m, a experiência alcançada mostra que as técnicas desenvolvidas podem ser aplicadas a qualquer profundidade. Para apreciação dos méritos do novo método ele foi várias vezes aplicado em furos a pequenas distâncias, da ordem de 0,5 m, de furos nos quais a amostragem tinha sido realizada seguindo a técnica comum, com extractor duplo.

Apresentam-se a seguir referências sumárias a amostragens feitas em maciços rochosos com condições tais que o método comum de amostragem conduzia a percentagens de recuperação muito baixas ou não permitia mesmo obter tarolos.

As figs. 8 a 11 referem-se a formações graníticas decompostas ou mesmo já convertidas em solo residual. Apesar do estado de alteração foi possível obter sempre amostras de todo o maciço rochoso. No caso da fig. 10 tratava-se de zona de granito decomposto onde se cruzavam três diaclases com enchimento argiloso muito mole que não permitiu a entrada do aglutinante nas diaclases. Apesar de condição tão adversa, só se perderam algumas pequenas partes superficiais da amostra.

Nas figs. 12 a 16 apresentam-se alguns aspectos de amostras integrais extraídas de maciço constituído por um xisto clorítico, com graus

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

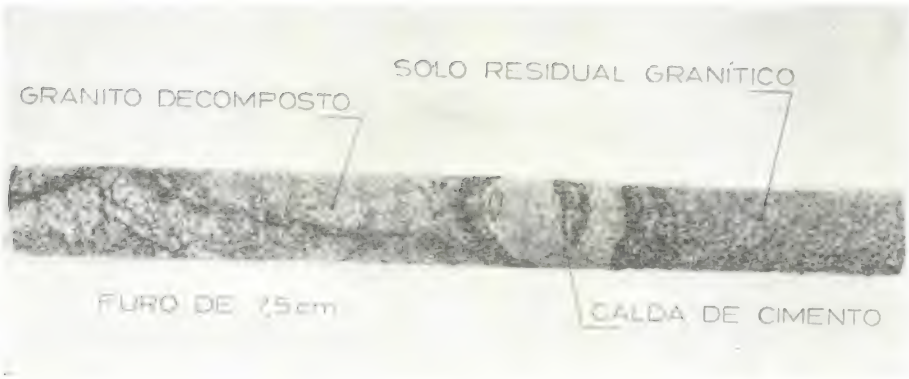



Fig. 11

Fig. 12

de alteração variáveis, que continha frequentes intercalações lenticulares de mármore e também cavidades resultantes da dissolução dessas intercalações. Além disso, o maciço era cortado por várias falhas. Nas figs. 12 e 13 vêem-se bem as cavidades provenientes da referida dissolução e compreende-se que a percentagem de recuperação pela técnica comum fosse baixa.

## 5. CONCLUSÃO

Passou-se pois a dispor de método de amostragem que permite a observação de todas as características dos maciços rochosos e da sua orientação. Mais do que isso, as amostras colhidas podem ser ensaiadas para determinação das propriedades das fracturas de vários tipos, incluídos

Fig. 13

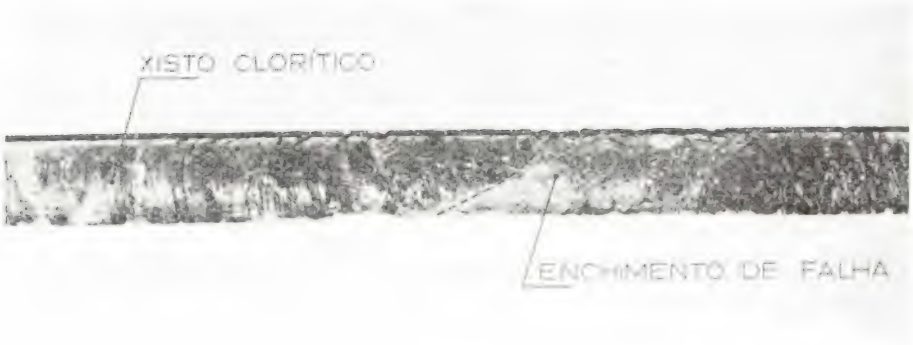



Fig. 14

As figs. 14 a 16 mostram como o método da amostragem integral permite mesmo a perfeita amostragem de enchimentos de falhas, sendo de destacar o caso da fig. 16 que se refere a amostra que incluía troço com cerca de 20 cm, de um enchimento argiloso mole.

os seus enchimentos, e das zonas de fraca resistência, em especial das propriedades mecânicas. Deste modo, a amostragem integral contribui para a aplicabilidade das teorias da mecânica das rochas que consideram o papel relevante desempenhado pelas fracturas, pois até agora se tem lu-

Fig. 15

Fig. 16

tado com a dificuldade de as detectar e caracterizar.

É oportuno referir que se, por um lado, a amostragem comum fornece informação insuficiente e conduzindo por vezes a apreciação optimista em virtude de não estarem representadas as zonas de menor resistência, por outro lado, a observação das paredes de galerias de inspecção pode conduzir a apreciação desfavorável, dada a perturbação do maciço rochoso derivada da abertura das galerias.

Nota-se que, enquanto na técnica comum de amostragem é em regra difícil verificar que o grau de recuperação obtido é o que seria razoável exigir, na amostragem integral a situação simplifica-se porque só é aceitável, salvo casos de espécie, uma recuperação de 100 %.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece a valiosa colaboração prestada pelo Engenheiro Manuel Barroso, Especialista do L. N. E. C., e pelo Engenheiro Júlio Montalvão, Estagiário para Especialista, no desenvolvimento do equipamento e na aplicação das técnicas em laboratório e no campo.

# NOTICIÁRIO

## Preparação do 5.º Congresso do Conseil International du Bâtiment

A preparação do 5.º Congresso do CIB, que terá lugar no Palácio dos Congressos de Versailles de 22 a 30 de Junho de 1971 prossegue activamente.

A orientação geral do Congresso, cujo título é: «Da investigação à prática: o desafio da aplicação», é a de constatar o estado dos conhecimentos úteis à construção e o grau da sua aplicação na prática. Espera-se que será a ocasião para as pessoas ligadas à construção de melhor conhecer o que já existe e também para determinar o que seria necessário fazer para que o que se conhece seja mais divulgado e utilizado.

Pràticamente todo o domínio das ciências e técnicas da construção será coberto pelos 16 temas do Congresso:

1 — Os dados naturais
2 — As exigências dos utilizadores
3 — Acústica
4 — Higrotermia
5 — Informática
6 — Estática
7 — O fogo
8 — Economia da construção
9 — As ajudas para a concepção
10 — Tecnologia do betão vazado
11 — Sistemas de construção ligeira
12 — A tecnologia industrializada das casas individuais e das escolas
13 — A tecnologia dos prédios altos
14 — Tendências no emprego da madeira
15 — Novas tendências no equipamente e ventilação
16 — O habitat muito económico.

Uma brochura dando todos os dados sobre os temas, o calendário, o local das sessões e as informações práticas de toda a ordem pode ser obtida no

Sécretariat du Congrès du CIB 4, Av. du Recteur Poincaré
Paris, 16 ème.

## COPRAI
## Aperfeiçoamento dos métodos e estudo dos tempos na Indústria de Artes Gráficas

A COPRAI vai organizar, de 29 a 31 de Março de 1971, um curso sobre o tema indicado com a duração de 18 horas.

O Curso que será ministrado em Língua Espanhola pelo Eng. D. ENRIQUE DEL NOGAL ROPERO terá o seguinte

PROGRAMA:
Produtividade
Estudo do trabalho
Produção
Aperfeiçoamento de Métodos
Diagramas
Implantação
Estudo de Movimentos
Exercícios práticos, Investimentos e aperfeiçoamentos tecnológicos
Estudo dos Tempos
Estudo dos Tempos com cronómetro
Valoração da actuação
Suplementos
Tempo padrão
Simplificação de trabalho administrativo.

## Feiras e Exposições em Basileia em 1971

No ano de 1971 realizar-se-ão em Basileia as seguintes feiras e exposições interessando à engenharia:

— De 9 a 13 de Março
5.º Salão Internacional de Electrónica Industrial — INEL
— De 17 a 27 de Abril
55.ª Feira Suiça de Amostras
— De 8 a 12 de Junho
5.º Salão Internacional da protecção do meio vital
— De 3 a 23 de Junho
Exposição industrial da URSS
— De 13 a 18 de Setembro
5.º Salão Internacional da Técnica de Laboratório, da Técnica de Medida, de Engenharia Química e da Automática em Química
— De 24 de Setembro a 2 de Outubro
HOLZ 71 — Feira para o trabalho da Madeira

# MAGUE

Pórtico de 100t-15t/11 m em serviço na Central de Carrapatelo, da C.P.E. Companhia Portuguesa de Electricidade S.A.R.L.

| | |
|---|---|
| PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS | *Projecto e fabrico* |
| TURBINAS HIDRÁULICAS | *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.* |
| TURBINAS A VAPOR | *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.* |
| CALDEIRAS A VAPOR | *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.* |
| EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS | |

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

# TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

**A APARECER BREVEMENTE**

PEDIDOS À

**técnica**

C. D. U. 517.632:517.392

# INVERSÃO NUMÉRICA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

por A. M. R. MARRECAS
Eng.º Mecânico (IST)

RESUMO

*Sugere-se um processo numérico para inversão de um tipo restrito de transformadas de Laplace e refere-se a sua aplicação imediata no domínio das técnicas de regulação.*

SYNOPSIS

*A numerical method for inversion of a restricted range of Laplace transforms is sugested and its immediate interest in the field of regulation technics is referred.*

## 1. INTRODUÇÃO

As transformadas integrais desempenham, nos problemas técnicos, um papel de crescente importância, permitindo a manipulação de questões insolúveis por outras técnicas. A transformada de Laplace reúne um potencial notável, sob esse aspecto, sendo até a mais amplamente divulgada.

A transformada de uma função f (t) define-se

$$\phi(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

e a sua inversa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\phi(p)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \phi(p)\, e^{pt}\, dp$$

A determinação analítica da transformada inversa envolve, por vezes, operações delicadas ou, pelo menos, laboriosas. Estas poderão ser, nalguns casos, torneadas, utilizando processos numéricos de cálculo. No presente artigo propõe-se um método numérico abrangendo, apenas, um sector restrito das transformadas inversas.

## 2. TRATAMENTO MATEMÁTICO

### 2.1 — Posição do problema

Procura-se a determinação de transformadas inversas do tipo

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\}$$

com $p = \alpha + i\omega$, respeitando-se as condições seguintes:

1) $\alpha = 0$. Será então

$$F(p) = F(i\omega) = U(\omega) + i\, V(\omega)$$

2) F (p) é uma função racional de coeficientes reais, tal que

$$F(-\omega) = U(\omega) - i\, V(\omega)$$

### 2.2 — Tratamento formal

O leitor interessado poderá encontrá-lo em [1]. Aqui transcrevem-se, apenas, as expressões que permitirão solucionar o problema enunciado em 2.1.

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega}\, \text{sen}\, \omega t\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega}\, \cos \omega t\, d\omega + F(o)$$

As duas expressões podem ser utilizadas independentemente uma da outra e ao critério do utilizador, apenas havendo a notar que:

1) $\frac{U(\omega)}{\omega}$ ou $\frac{V(\omega)}{\omega}$ terão que ser tais que

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{U(\omega)}{\omega} = 0 \quad \lim_{\omega \to \infty} \frac{V(\omega)}{\omega} = 0$$

2) Para uma mesma precisão de resultados, exigirá menos tempo de cálculo a integranda mais ràpidamente convergente para zero, o que se pode avaliar através dos

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{U(\omega)}{V(\omega)}$$

3) Para se utilizar $U(\omega)$, terá que ser $U(o)$ finito ou nulo; para utilizar $V(\omega)$ deverá ser $V(o) = 0$.

4) $U(\omega)$ ou $V(\omega)$ não terão zeros para valores de $\omega \neq 0$.

As condições impostas em 2.1 — 1) e 2) e 2.2 — 1), 2), 3) e 4) não restringem dràsticamente

o campo das funções a que o método é aplicável, posto que muitas são as que as satisfazem.

### 2.3 — Tratamento numérico

Para cada valor de t será possível representar gràficamente qualquer das integrandas. Vamos supor a representação fictícia da Fig. 1. Os zeros da integranda serão os zeros da função sen $\omega t$. É evidente que a integração não poderá ser levada até ao infinito e deverá, portanto, ser interrompida em certo $\omega_M$. É também óbvio que o erro cometido será menor se $\omega_M$ se situar entre dois zeros e será ideal para certo valor entre os dois zeros escolhidos Não se procurará o valor ideal, mas sim o mais simples e esse será o ponto médio entre dois zeros consecutivos, facílimo de determinar em funções do tipo sinusoidal. Os valores absolutos da função integranda nos pontos médios serão, sucessivamente, comparados com uma quantidade tão pequena quanto quisermos, satisfazendo o que tiver valor menor ou igual a essa quantidade. Na figura 1 as linhas ponteadas representam o valor absoluto da integranda nas zonas onde ela é negativa e a linha horizontal o valor, por assim dizer, padrão. No caso da figura, $\omega_M$ seria o 3.º ponto médio e a integração processar-se-ia de 0 a $\omega_M$ pela regra de Simpson. Nesta, o erro em relação ao valor real do integral será controlado pela diferença — ERRO2 — entre dois integrais aproximados sucessivos achados com um número de intervalos duplo um do outro [2]. A precisão, controlável pelo valor ERRO 1 e ERRO 2 será tanto maior quanto menores eles forem, mas o tempo de cálculo crescerá, também, simultâneamente. O raciocínio, para o caso de se usar V ($\omega$), é perfeitamemte paralelo ao exposto.

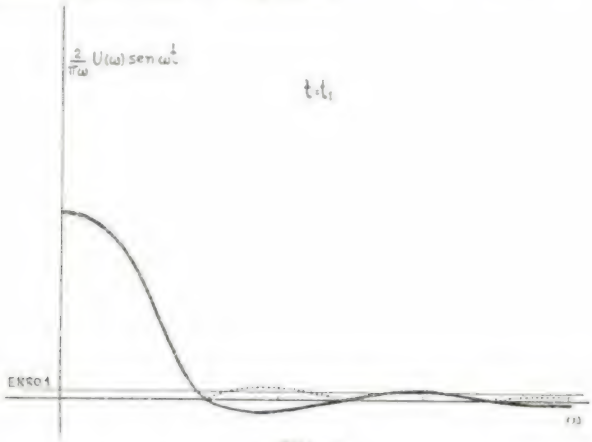



Fig. 1

### 2.4 — Exemplos

2.4.1 — Considere-se a função

$$f(p) = \frac{1}{1+p}$$

que poderá escrever-se

$$F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

O valor de $\lim\limits_{\omega \to \infty} \frac{U(\omega)}{V(\omega)}$ permite concluir ser $U(\omega)$ mais favorável para os nossos propósitos. No entanto, e porque se trata de um exemplo de aplicação do método, utilizaremos, paralelamente, $U(\omega)$ e $V(\omega)$ para o cálculo de $f(t)$. Reproduzem-se tabelas (TAB I e TAB II) em que se comparam os valores obtidos numèricamente e os valores correctos conseguidos por cálculo exacto a partir da expressão $f(t) = 1 - e^{-t}$, deduzida analìticamente por inversão

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p\,(1+p)}\right\}$$

Nas figuras 2 e 3 reproduzem-se, também, os programas que permitiram realizar, num computador IBM 1620, os cálculos descritos. Os programas poderão ser usados para qualquer fun-

```
PDQ FORTRAN 02

MAIN
-6600        DIMENSION T(15),FOM(15),S(15)
-6608      1 FORMAT(F11.8,2F8.1)
-6632      2 FORMAT(I 7,3)
-6644      4 FORMAT(I3)
-6676     80 FORMAT(F7.3,4E14.6)
-6708        READ 4,N
-6732        READ 1,PI,ERRO1,ERRO2
-6760        DO 50 I=1,N
-6792     50 READ 2,T(I)
-6876        DO 300 I=1,N
-6888        V=1.
-6900     70 OM=(2.*V+1.)*PI/(2.*T(I))
-7032        FOM(I)=2.*SIN(OM*T(I))/(PI*OM*(1.+OM**2))
-7248        G=ABS(FOM(I))
-7296        IF(G-ERRO1) 10,10,40
-7364     40 V=V+1.
-7400        GO TO 70
-7408     10 L=2
-7420        DX=0.5*OM
-7456        FO=2.*T(I)/PI
-7528        SO=FO+FOM(I)
-7588        SP=0.
-7600        S1=2.*SIN(DX*T(I))/(PI*DX*(1.+DX**2))
-7708        S(1)=(FO+4.*S1)*DX/3.
-7864    100 S1=S(1)
-7924        L=2*L
-7960        K=L-1
-8008        DX=0.5*DX
-8132        SP=SP-S1
-8168        S1=0.
-8230        DO 200 J=1,K,2
-8292        Z=J
-8124    200 S1=S1+2.*SIN((Z*DX)*T(I))/(PI*(Z*DX)*(1.+(Z*DX)**2))
-8544        S(J)=(SO+4.*S1+2.*SP)*DX/3.
-8548        A=ABS(S(J)-S1)
-8620        IF(A-ERRO2) 300,100,100
-8668    300 PRINT 80,T(I),FOM(I),S(I)
-8844        STOP
-8856        END
T9999 SIN
T9997 SINF

PROCESSING COMPLETE
START
```

Fig. 2

ção, adaptando ao caso em estudo os «statements» assinalados com uma seta, que representam, por ordem, de cima para baixo

```
   160001000000N
PDQ FORTRAN C2

START
-6600        DIMENSION T(15),FOM(15),S(15)
-6600      1 FORMAT(F11.8,2E8.1)
-6632      2 FORMAT(F7.3)
-6654      4 FORMAT(I3)
-6676     80 FORMAT(F7.3,2E14.8)
-6708        READ 4,N
-6732        READ 1,PI,ERRO1,ERRO2
-6780        DO 50 I=1,N
-6792     50 READ 2,T(I)
-6876        DO 400 I=1,N
-6888        V=1.
-6900     70 OM=V*PI/T(I)
-6972        FOM(I)=-2.*COS(OM*T(I))/(PI*(1.+OM**2))  ———————→
-7164        G=ABS(FOM(I))
-7212        IF(G-ERRO1) 10,10,40
-7280     40 V=V+1.
-7316        GO TO 70
-7324     10 L=2
-7336        DX=0.5*OM
-7372        FO=-2./PI  ———————————————————————→
-7428        SO=FO+FOM(I)
-7480        SP=0.
-7492        S1=-2.*COS(DX*T(I))/(PI*(1.+DX**2))  ———————→
-7660        S(I)=(SO+4.*S1)*DX/3.
-7756    100 S1=S(I)
-7792        L=2*L
-7828        K=L-1
-7864        DX=0.5*DX
-7900        SP=SP+S1
-7936        S1=0.
-7948        DO 200 J=1,K,2
-7960        Z=J
-7996    200 S1=S1-2.*COS((Z*DX)*T(I))/(PI*(1.+(Z*DX)**2))  ———→
-8236        S(I)=(SO+4.*S1+2.*SP)*DX/3.
-8380        A=ABS(S(I)-S1)
-8452        IF(A-ERRO2) 300,100,100
-8520    300 S(I)=S(I)+1.
-8604    400 PRINT 80,T(I),FOM(I),S(I)
-8760        STOP
-8772        END

PROCESSING COMPLETE
START
```

Fig. 3

1) Valor de $\frac{2\,U(\omega)}{\pi\,\omega}$ sen $\omega\,t$ $\left(\text{ou } \frac{2\,V(\omega)}{\pi\,\omega} \cos \omega\,t\right)$ para $\omega = OM$
2) Idem para $\omega = 0$
3) Idem para $\omega = DX$
4) Somatório dos termos ímpares em que a 2.ª parcela será o valor da função $\frac{2\,U(\omega)}{\pi\,\omega}$ sen $\omega\,t$ $\left(\text{ou } \frac{2\,V(\omega)}{\pi\,\omega} \cos \omega\,t\right)$ para $Z \times DX$

Notar que, no caso de se utilizar $V(\omega)$, o «statement» 300 adiciona ao integral aproximado S(I) o valor F(0)

2 4.2 — **Tome-se a expressão**

$$F(i\,\omega) = \frac{b_o + b_1\,(i\,\omega)}{T_2\,(i\,\omega)^2 + T_1\,(i\,\omega) + 1}$$

ou

$$F(\omega) = \frac{b_o + (b_1\,T_1 - b_o\,T_2)\,\omega^2}{T_2^2\,\omega^4 + (T_1^2 - 2\,T_2)\,\omega^2 + 1} + i\,\frac{(b_1 - b_o\,T_1)\,\omega - b_1\,T_2\,\omega^3}{T_2^2\,\omega^4 + (T_1^2 - 2\,T_2)\,\omega^2 + 1}$$

com

$b_o = 12{,}50 \quad b_1 = 29{,}50 \quad T_1 = 11{,}60 \quad T_2 = 6{,}35$

O valor de

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = 0$$

mostra ser mais conveniente para os nossos cálculos $U(\omega)$. O novo programa, com os «statements» já assinalados adaptados à nova função, reproduz-se na fig. 4. Numa tabela (TAB III) comparam-se os valores obtidos numèricamente com os exactos, calculados a partir da inversão analítica

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_o + b_1\,p}{p\,(T_2\,p^2 + T_1\,p + 1)}\right\}$$

## 3. CONCLUSÕES

1) O processo numérico couduz a valores perfeitamente aceitáveis para as necessidades de precisão correntes, podendo tornar-se mais satisfatórios ainda à custa de um aperto dos valores ERRO 1 e ERRO 2, implicando, todavia, um

```
PDQ FORTRAN C2
START
-6600        DIMENSION T(15),FOM(15),S(15)
-6600      1 FORMAT(F11.8,2E8.1)
-6632      2 FORMAT(F7.3)
-6654      4 FORMAT(I3)
-6676     80 FORMAT(F7.3,2E14.8)
-6708        READ 4,N
-6732        READ 1,PI,ERRO1,ERRO2
-6780        DO 50 I=1,N
-6792     50 READ 2,T(I)
-6876        DO 300 I=1,N
-6888        V=1.
-6900     70 OM=(2.*V+1.)*PI/(2.*T(I))
-7052        B=2.*(12.5+262.8*OM**2)*SIN(OM*T(I))
-7188        C=(40.32*OM**4+121.86*OM**2+1.)*PI*OM
-7332        FOM(I)=B/C
-7392        G=ABS(FOM(I))
-7440        IF(G-ERRO1) 10,10,40
-7508     40 V=V+1.
-7544        GO TO 70
-7552     10 L=2
-7564        DX=0.5*OM
-7600        FO=2.*12.5*T(I)/PI
-7684        SO=FO+FOM(I)
-7744        SP=0.
-7756        B1=2.*(12.5+262.8*DX**2)*SIN(DX*T(I))
-7912        C1=(40.32*DX**4+121.86*DX**2+1.)*PI*DX
-8056        S1=B1/C1
-8092        S(I)=(SO+4.*S1)*DX/3.
-8188    100 S1=S(I)
-8224        L=2*L
-8260        K=L-1
-8296        DX=0.5*DX
-8332        SP=SP+S1
-8368        S1=0.
-8380        DO 200 J=1,K,2
-8392        Z=J
-8428        B2=2.*(12.5+262.8*(Z*DX)**2)*SIN((Z*DX)*T(I))
-8608        C2=(40.32*(Z*DX)**4+121.86*(Z*DX)**2+1.)*PI*(Z*DX)
-8812    200 S1=S1+B2/C2
-8896        S(I)=(SO+4.*S1+2.*SP)*DX/3.
-9040        A=ABS(S(I)-S1)
-9112        IF(A-ERRO2) 300,100,100
-9180    300 PRINT 80,T(I),FOM(I),S(I)
-9336        STOP
-9348        END
PROCESSING COMPLETE
START
```

Fig. 4

inevitável aumento do tempo de cálculo. Não há um critério absoluto para a escolha destes dois valores: apenas a experiencia, a análise do tipo da função em causa e a precisão pretendida permitirão a selecção mais adequada [1].

2) O processo tem aplicação imediata nas técnicas de regulação envolvendo sistemas lineares em que, como se sabe, a resposta harmónica se define

$$F(p) = \frac{L\{f(t)\}}{L\{s(t)\}} = \frac{L\{f(t)\}}{1/p}$$

em que s(t) será tal que

$$s(t) = 0 \qquad t < 0$$
$$s(t) = 0 \qquad t \geqslant 0$$

e $p = i\omega$. Então

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left| \frac{F(p)}{p} \right|$$

3) O método poderá prestar algum auxílio em problemas envolvendo transformadas de funções satisfazendo aos requisitos enunciados.

TABELA I

Valores de f(t) usando

$$U(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}, \text{ com ERRO 1} = \text{ERRO 2} = 0{,}001$$

| t | f(t) Processo numérico | f(t) Cálculo exacto |
|---|---|---|
| 0,449 | 0,3622 | 0,3617 |
| 0,628 | 0,4662 | 0,4663 |
| 0,785 | 0,5436 | 0,5439 |
| 1,047 | 0,6491 | 0,6490 |
| 1,570 | 0,7918 | 0,7919 |
| 3,140 | 0,9567 | 0,9567 |
| 3,950 | 0,9808 | 0,9807 |
| 6,280 | 0,9981 | 0,9981 |

[1] Em casos correntes, considera-se aceitável o valor ERRO 1 = $10^{-3}$, podendo ser aumentado quando o polinómio denominador for de grau elevado. Para ERRO 2, um valor da ordem $10^{-3}$ garantirá aproximações normalmente satisfatórias. Os valores indicados devem ser tomados como base e não como universais.

TABELA II

Valores de f(t) usando

$$V(\omega) = -\frac{\omega}{1+\omega^2} \text{ com ERRO 1} = \text{ERRO 2} = 0{,}001$$

| t | f(t) Processo numérico | f(t) Cálculo exacto |
|---|---|---|
| 0,449 | 0,3620 | 0,3617 |
| 0,628 | 0,4665 | 0,4663 |
| 0,785 | 0,5438 | 0,5439 |
| 1,047 | 0,6489 | 0,6490 |
| 1,570 | 0,7919 | 0,7919 |
| 3,140 | 0,9567 | 0,9567 |
| 3,950 | 0,9807 | 0,9807 |
| 6,280 | 0,9981 | 0,9981 |

TABELA III

Valores de f(t) usando

$$U(\omega) = \frac{b_0 + (b_1 T_1 - b_0 T_2)\omega^2}{T_2^2\omega^4 + (T_1^2 - 2T_2)\omega^2 + 1}, \text{ com}$$

ERRO 1 = ERRO 2 = 0,01

| t | f(t) Processo numérico | f(t) Cálculo exacto |
|---|---|---|
| 0,449 | 1,5718 | 1,5692 |
| 0,785 | 2,2989 | 2,30[illegible]5 |
| 1,570 | 3,3697 | 3,3705 |
| 3,140 | 4,6946 | 4,6944 |
| 6,280 | 6,6359 | 6,6369 |
| 8,500 | 7,7055 | 7,7056 |
| 12,500 | 9,1645 | 9,1646 |
| 16,500 | 10,1795 | 10,1795 |
| 28,000 | 11,6824 | 11,6824 |
| 45,000 | 12,3251 | 12,3251 |
| 60,000 | 12,4551 | 12,4551 |

BIBLIOGRAFIA

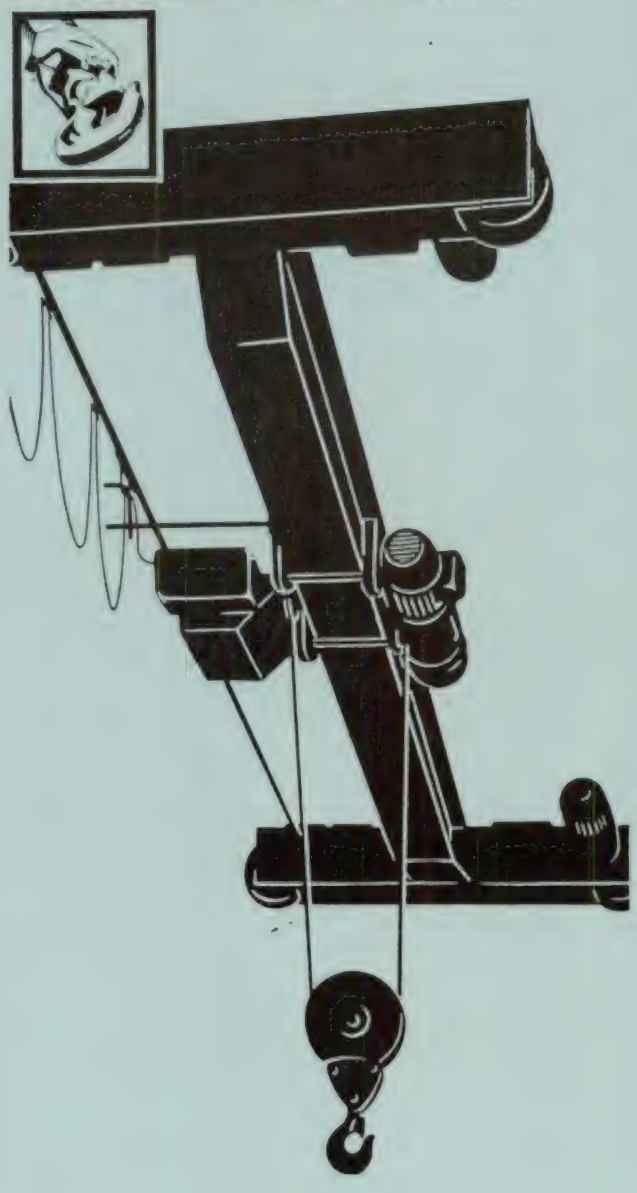
PROFOS, P.; KELLER, H., La transformation de functions périodiques par procédé graphique e son application à la technique du réglage, Extrait de la Revue Technique Sulzer, n.º f/23.06.3 — Ceg 3.

CADETE, M. O.; CADETE, A., Sistema de programação FORTRAN II, pp. 93-96, LISBOA, 1970

AGRADECIMENTO

A IBM PORTUGUESA que, com a cedência do seu computador IBM 1620, possibilitou este trabalho.

**DEMAG** EQUIPA TODA A INDUSTRIA



## Pontes rolantes fabricadas em cadeia...

As pontes rolantes Standard são fabricadas em série, nos tipos monoviga e biviga, pelo sistema de combinação de peças normalizadas.
Para vãos até 28 m e capacidades de carga de 250 kg a 20.000 kg permitem a adaptação às vossas condições de trabalho.

Reduzido peso próprio, pequena altura de construção, prazos de entrega rápidos, preços excepcionalmente baixos, eis as vantagens das pontes rolantes standard «Demag»:
Consulte-nos e os nossos engenheiros efectuarão o estudo do seu problema gratuitamente,
Assistência exemplar - O vosso sucesso será também o nosso.

ROMAR — UMA ORGANIZAÇÃO AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA

SOCIEDADE COMERCIAL ROMAR, LDA.

LISBOA – TRAVESSA DA GALÉ, Nº 9 TEL. 635670 / 634061 • PORTO – R DE SA DABANDEIRA, Nº 589/603 TEL. 25871/32205

# INDUSTRIAIS TEXTEIS

PARA OS VOSSOS MANCHONS, FLANELAS, TRANSPORTADORES,
E TODOS OS TECIDOS TÉCNICOS

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

**Consultem:**

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

# Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESIRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

**Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português**

DELEGAÇÃO - LISBÔA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C.P: 2178 - Tel. 81 89 7

MOÇAMBIQUE
L. Marques - C.P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71 49 7

C. D. U. 512.9 + 512.831 : 621 3

# DESCRIÇÃO DE SISTEMAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO, IMAGEM E COMPLEXO ATRAVÉS DO REGIME DE TRANSFERÊNCIA E DO ESTADO DINÂMICO

por HERMÍNIO DUARTE-RAMOS
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Colaborador Científico do Shering-Institut (T. U. Hanover)
Bolseiro da U. L. (Angola)

RESUMO

*Define-se o conceito e tipos de sistemas e efectua-se a respectiva descrição através da equação diferencial, da função de transferência complexa e da resposta de frequência. A partir das equações dinâmicas define-se a matriz de transferência complexa e caracterizam-se os sistemas por meio da equação de estado, mostrando-se as propriedades mais pertinentes e menos esclarecidas na literatura.*

SYNOPSIS

*The conception of system and its types are defined and particular systems are described by differential equation, transfer function and frequency response. The dynamic equations and the transfer matrix are introduced. The state equation is used to define the principal systems, and the most important properties are criticised.*

## 1. INTRODUÇÃO

Na técnica de controle utiliza-se a noção de transferência para se caracterizar a resposta a uma determinada excitação, em geral através da função de transferência complexa do sistema. A aplicação do método é de tal modo frequente que se perde ocasionalmente a medida das suas limitações, o que provoca uma certa imprecisão nos estudos por vezes apresentados na literatura.

Por exemplo, o estabelecimento da equação diferencial de um sistema não é normalmente caracterizado, conduzindo a uma imperfeita, às vezes até falsa, noção de função de transferência complexa. Igualmente se encontram misturados, chegando-se a afirmar a sua identidade, os domínios imagem e complexos.

Pretende-se neste estudo caracterizar as noções essenciais da teoria dos sistemas, fundamento da teoria da automação, por meio dos seus conceitos básicos e propriedades fundamentais.

## 2. CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS

Chama-se *sistema* a todo o conjunto de elementos físicos, caracterizado por um determinado número de parâmetros, que pode transferir qualquer sinal de entrada (aplicado aos terminais de entrada do sistema) para os terminais de saída (onde se capta o sinal de saída), ou, mais genèricamente, é qualquer estrutura física que permite fornecer uma informação.

Os *parâmetros* de um sistema são grandezas físicas que caracterizam os elementos físicos de constituição do sistema, por exemplo, a capacidade de um condensador ou a massa de um corpo.

Se o valor dos parâmetros de um sistema depende da posição no espaço e do tempo (é o caso de uma linha de transmissão) diz-se que se trata de um *sistema de parâmetros distribuídos*; se os parâmetros são apenas função do tempo (e não do espaço) trata-se de um *sistema de parâmetros concentrados*. Em geral a aproximação dos sistemas de parâmetros concentrados é suficiente tornando-se mais simples a sua análise.

Na definição de sistema refere-se o conceito de *sinal* que é um estado físico utilizado para reconhecimento de uma informação (sinal de entrada ou excitação do sistema) e doação dessa informação (sinal de saída ou resposta). O sinal de entrada equivale a uma excitação ou causa e o sinal de saída a uma resposta ou efeito. Os sinais, sendo observáveis apenas através de variações no tempo, são funções do tempo, representando-se, convencionalmente, o sinal de entrada por y (t) e o sinal de saída por x (t).

Esquemàticamente pode representar-se um sistema por meio de um *esquema de blocos* onde figuram os sinais de entrada e de saída (fig. 1).

Fig. 1 — Esquema de blocos de um sistema.
*a*) Caso geral;
*b*) Quadrípolo.

Um sistema é em geral constituído por certo número de elementos concentrados armazenadores de energia, como sejam condensadores e solenóides em circuitos eléctricos ou molas e e massas em circuitos mecânicos, dizendo-se portanto que se está em presença de um *sistema com memória.*

O momento em que se começa a observar o comportamento de um sistema denomina-se *instante inicial* de observação $t_0$. Este valor $t_0$ é arbitrário e fixo e corresponde normalmente ao momento em que se aplica o sinal de entrada (mas pode ser outro valor, como é forçoso no caso em que não existe sinal de entrada).

Se os elementos armazenadores de energia se encontram completamente descarregados no instante inicial (para $t = t_0$) então refere-se a um *sistema sem energia.* Este é o caso mais importante na prática, devendo contudo observar-se a existência das suas condições a fim de evitar falsos resultados.

Um sistema pode não ter qualquer excitação à entrada, caracterizando-se assim um *sistema livre*

$$y(t) \equiv 0 \text{ para } t \geqslant t_0 \ (t_0 \text{ qualquer e fixo}) \quad (1)$$

onde $t_0$ é o instante inicial de observação.

O *princípio de causalidade* pode agora enunciar-se: num sistema sem energia não há efeito (sinal de saída) sem causa (sinal de entrada)

$$x(t) \equiv 0 \text{ para } y(t) = 0 \text{ e } t \geqslant t_0 \ (t_0 \text{ qualquer e fixo}) \quad (2)$$

Deste modo *sistema causal* é aquele em que as grandezas de saída (após o instante inicial: para $t \geqslant t_0$) dependem apenas da história do sistema (anterior ao instante inicial: para $t < t_0$) e das grandezas de entrada (passado e presente), tendo o futuro o peso zero.

Um *sistema linear* é todo o sistema onde se verifica a *lei de sobreposição,* correspondente à sobreposição física de sinais,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i(t)) \quad (3)$$

e a *lei de homogeneidade,* fìsicamente equivalente à amplificação de sinais,

$$f(a.x(t)) = a.f(x(t)) \ , \text{ com } a = \text{const.} \quad (4)$$

ou seja, para qualquer sinal de entrada y (t) em qualquer instante t verifica-se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i L\{y_i(t)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} L\{a_i y_i(t)\} \quad (5)$$

sendo $a_i$ constantes e $L\{\ldots\}$ um operador ou uma transformação.

*Sistema de tempo invariante,* também designado sistema estacionário, é aquele cujo comportamento é independente do instante de observação

$$x(t-\tau) = L\{y(t-\tau)\} \ ,$$

$$\text{para todo } t \text{ e } \tau \text{ qualquer e fixo} \quad (6)$$

Chama-se *sistema autónomo* a um sistema de tempo invariante que seja livre (não tendo por conseguinte sinal aplicado à entrada).

Todo o sistema causal em que para grandezas reais também as grandezas de saída são reais diz-se *sistema realizável.* Um tal sistema exige o conhecimento dos sinais de entrada y (t) e de saída x (t) no intervalo $(-\infty, t)$; quando apenas se conhece o sinal de entrada no intervalo $(t_0, t)$ é necessário o conhecimento das condições iniciais para a sua completa descrição.

As *condições iniciais* de um sistema são os valores

que caracterizam a descrição do sistema no instante inicial de observação $t_0$. Estas condições iniciais são função dos valores dos parâmetros do sistema e da interligação dos correspondentes elementos físicos no instante inicial. Como é evidente as condições iniciais de um sistema sem energia são todas nulas.

Em relação à duração do sinal de saída distinguem-se: *sistema contínuo* (fig. 2-a) se a saída se processa contìnuamente no tempo, *sistema discreto* (fig. 2-b) no caso da saída ser definida sòmente em certos valores discretos do tempo e *sistema discontínuo* (fig. 2-c) se a resposta se manisfesta por intervalos de tempo.

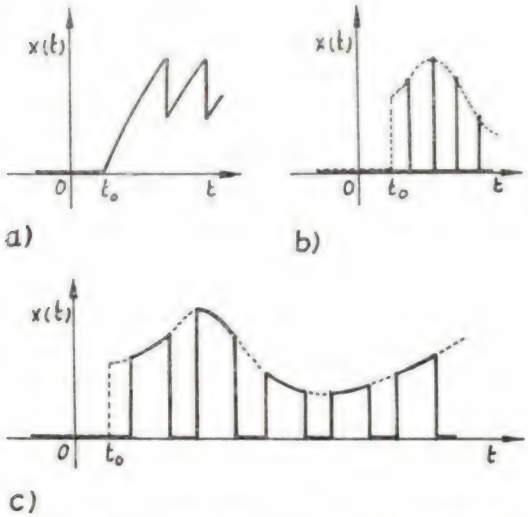



Fig. 2 — Sistemas de trabalho contínuo (*a*), discreto (*b*) e discontínuo (*c*).

Todo o *sistema determinista* é representável por uma função do tempo, tendo portanto tratamento matemático, enquanto *sistemas não deterministas*, relativos a sinais não controláveis, apenas poderão ter um tratamento estatístico.

Neste estudo considerar-se-ão sòmente sistemas de parâmetros concentrados, causais e de trabalho contínuo. Normalmente refere-se a sistemas de tempo invariante e em especial a sistemas lineares.

## 3. DESCRIÇÃO DE SISTEMAS ATRAVÉS DO PROCESSO DE TRANSFERÊNCIA

### 3.1. Descrição no domínio do tempo t

O *regime estacionário* de um sistema, atingido uma vez decorrido um tempo teòricamente infinito após a aplicação do sinal de entrada y(t), quando reinam dados valores de perturbação z (t) do sistema (fig. 3-a), determina um certo conjunto de valores de saída x (t). Fìsicamente o regime estacionário é atingido decorrido um intervalo de tempo finito considerado suficientemente longo para que ao valor de entrada corresponda de facto o respectivo valor estacionário de saída.

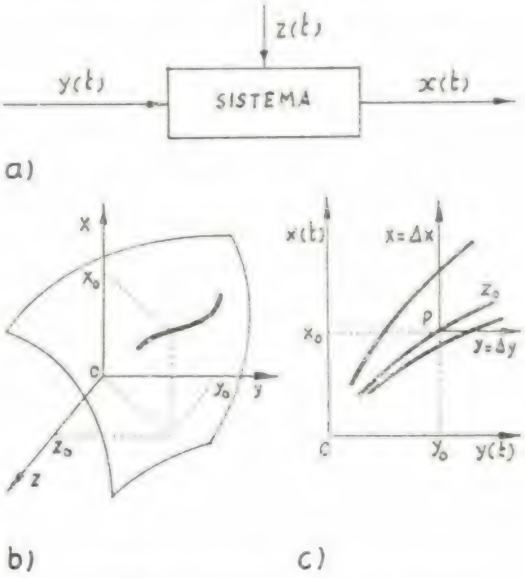



Fig. 3 — Regime estacionário de um sistema.
(*a*) Esquema de blocos;
(*b*) Superfície característica;
(*c*) Família de características.

O conjunto de pontos de funcionamento estacionário define a *superfície característica* do sistema (fig. 3-b).

$$\psi(x(t), y(t), z(t)) = 0 \qquad (7\text{-a})$$

ou

$$x(t) = g(y(t), z(t)). \qquad (7\text{-b})$$

Os valores particulares $x_0$, $y_0$, $z_0$ determinados por um dado funcionamento do sistema em regime estacionário caracterizam o chamado *ponto de trabalho* do sistema.

Como a superfície característica tem em geral uma forma qualquer e o ponto de trabalho pode ser qualquer é importante o conceito de *linearização* (se possível), que se obtém pelo desenvolvimento de Taylor da superfície característica em torno do ponto de trabalho

$$\Delta x = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0 \Delta z \qquad (8)$$

com os desvios $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ e $\Delta z = z - z_0$.

Normalmente toma-se $z(t)$ como parâmetro reduzindo-se a superfície característica a curvas no plano $y(t)$, $x(t)$. Para cada valor particular da grandeza de perturbação $z(t)$ estabelece-se então a chamada *característica do sistema* através da curva, em geral não linear, que descreve o seu regime estacionário, isto é, através da relação da resposta $x(t)$ a uma dada excitação $y(t)$ quando $t \longrightarrow \infty$

$$x(t) = f(y(t)) \text{ , com } z(t) = \text{const.} \qquad (9)$$

Esta função é em geral apenas representável gràficamente.

Ao conjunto de curvas características relativas ao funcionamento estacionário do sistema para distintos valores de perturbação chama-se *família* ou *campo de características* (fig. 3-c).

A linearização consiste portanto em substituir na vizinhança do ponto de trabalho a curva característica pela recta tangente no ponto de trabalho

$$\Delta x = \left(\frac{df}{dy}\right)_o \Delta y \text{ , com } z(t) = z_o \qquad (10\text{-a})$$

e, efectuando uma mudança de coordenadas para o ponto de trabalho ($x_o = y_o = 0$) , com $K = (df/dy)_o$ obtém-se

$$x = K\,y \qquad (10\text{-b})$$

onde x e y têm no novo sistema de coordenadas o significado dos desvios relativamente ao ponto de trabalho das grandezas $x(t)$ e $y(t)$, isto é, $x = \Delta x$ e $y = \Delta y$.

Genèricamente o *processo dinâmico de transferência* de um sistema estabelece-se pelas grandezas de entrada e de saída e respectivas variações, o que se traduz pela equação diferencial, em geral não linear [1],

$$f(x, x', \ldots, x^{(n)}, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0, m \leqslant n \qquad (11)$$

sendo portanto a linearização, em relação ao ponto de trabalho,

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{dx}\right)_o \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Delta x' + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \Delta x^{(n)} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o \Delta y' + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o \Delta y^m, m \leqslant n \qquad (12)$$

e como as derivadas no ponto de trabalho são constantes (por exemplo $dx_o/dt = 0$, donde $\Delta x' = dx/dt - dx_o/dt = x'$) deduz-se

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 x' + a_o(x - x_o) = b_n y^{(m)} + \ldots + b_1 y' + b_o(y - y_o), \quad m \leqslant n \qquad (13)$$

que conduz à *equação diferencial* do sistema, equação diferencial linear de coeficientes constantes resultante da linearização do sistema com uma mudança de coordenadas para o ponto de trabalho

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_o x(t) = b_o y(t) + b_1 y'(t) + \ldots + b_m y^{(m)}, m \leqslant n \qquad (14\text{-a})$$

$$\text{ou } \sum_{i=o}^{n} a_i x^{(i)}(t) = \sum_{k=o}^{m} b_k y^{(k)}(t) \text{ , } m \leqslant n \qquad (14\text{-b})$$

onde n é o número de armazenadores de energia que participam no processo de transferência desde a entrada até à saída do sistema. A equação diferencial de um sistema esclarece apenas o regime dos terminais do sistema (entrada e resposta) e em princípio nada diz sobre a realização (sobre a dinâmica interna) do processo de transferência, quer dizer,

$$E(x, x' \ldots x^{(n)}) = R(y, y', \ldots, y^{(m)}). \qquad (14\text{-c})$$

As condições iniciais de um sistema descrito pelo regime de transferência no domínio do tempo correspondem às condições iniciais (para $t = t_o$) da sua equação diferencial

$$x^{(n-1)}(t_o) \text{ , } x^{(n-2)}(t_o) \text{ , } \ldots \text{ , } x'(t_o) \text{ , } x(t_o) \qquad (15\text{-a})$$

sendo todas nulas no caso de sistemas sem energia:

$$x^{(n-1)}(t_o) = x^{(n-2)}(t_o) = \ldots = x'(t_o) \text{ , } x(t_o) = 0. \qquad (15\text{-b})$$

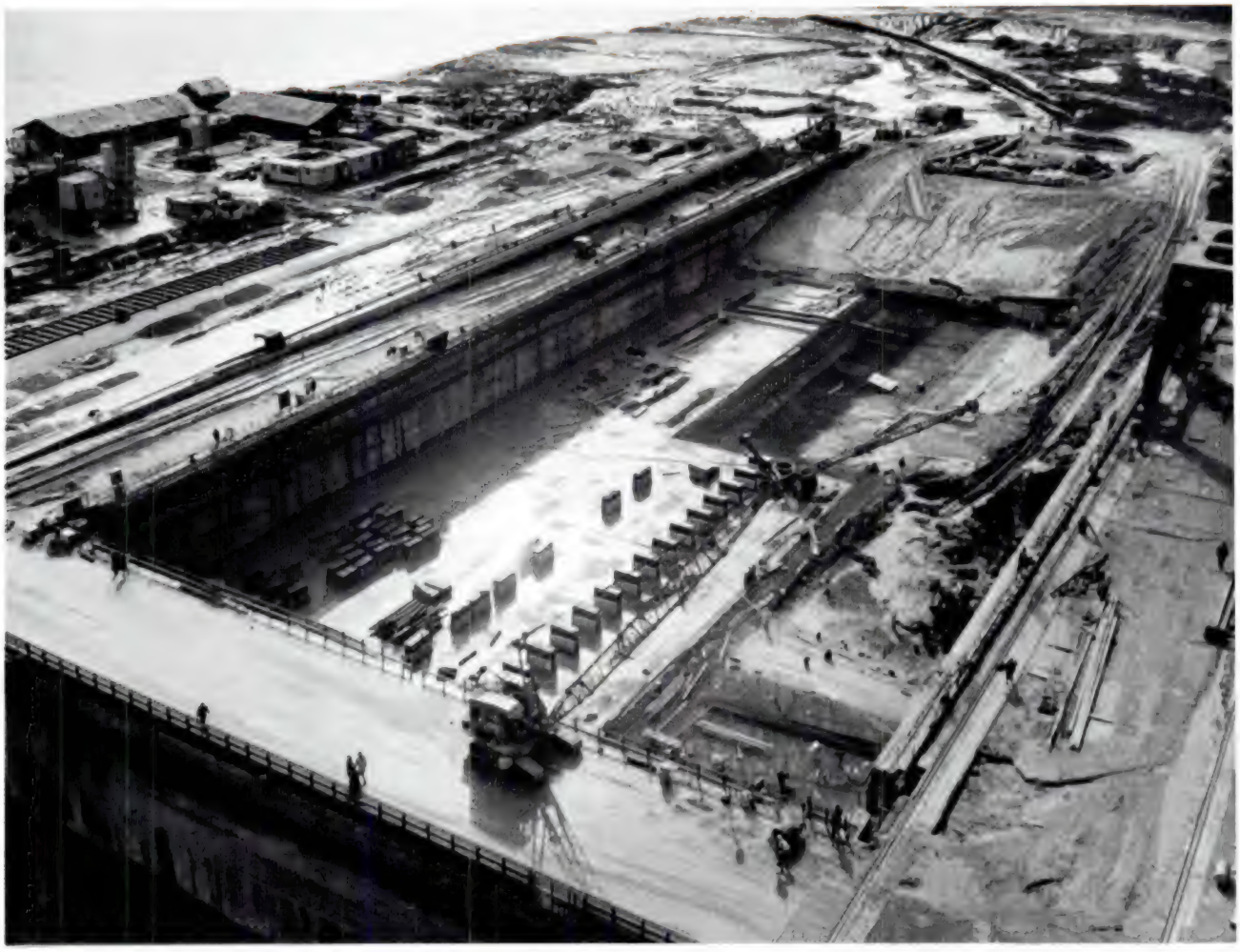
A *equação diferencial homogénea* corresponde ao sistema sem excitação à entrada, ou seja, ao sistema livre

$$\sum_{i=o}^{n} a_i x^{(i)}(t_o) = 0 \qquad (16)$$

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.



**LISNAVE** — Estaleiro da Margueira — Doca n.º 10.

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL—INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARITIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

**MOAGEM DA BEIRA - MOBEIRA** — Moçambique — Cidade da Beira — Construção de oito células cilíndricas com diâmetro interior de 7 metros e altura de 26,5 metros (moldes deslizantes).

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL—INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

donde resulta o *polinómio característico* pela substituição das derivadas de ordem sucessiva por potências do parâmetro $\lambda$

$$Q(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \qquad (17)$$

que determina a *equação característica* (equação homogénea definida pelo polinómio característico)

$$Q(\lambda) = 0 \qquad (18\text{-a})$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0 \qquad (18\text{-b})$$

cujas raízes (valores de $\lambda$) definem os zeros da equação diferencial homogénea.

Então a solução da equação diferencial homogénea, para r raízes reais de multiplicidade $m_s$ e valores $\lambda_s$ com $s = 1, \ldots, \mu$ e para c raízes pares complexas de multiplicidade $m_c$ e valores $\lambda_c$ com $c = \mu + 1, \ldots, \nu$ será

$$x_h = \sum_{s=1}^{\mu} \left( \exp(\lambda_s t) \cdot \sum_{i=1}^{m_s} c_{is} t^i \right) + \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \left( \exp(\lambda_s t) \cdot \sum_{i=1}^{m_s} c_{is} t^i + \exp(\lambda_s^* t / . c_{is}^* t^i \right) \qquad (19)$$

sendo a solução geral da equação diferencial não homogénea

$$x = x_h + x_p \qquad (20)$$

onde $x_p$ é uma solução particular, especial para cada caso concreto.

Na prática o processo de transferência de um sistema no domínio do tempo é caracterizado pela resposta aos chamados sinais de teste. Normalmente usa-se a *função impulsiva unitária* (fig. 4-a) definida por

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leqslant t_0 \\ 1 & \text{para } t > t_0 \end{cases} \qquad (21)$$

à qual corresponde a função resposta unitária, também designada *função transição* (fig. 4-b).

Em presença de um dado sistema, caracteriza-se o seu comportamento pela aplicação de um sinal impulsivo unitário na sua entrada e medindo-se o respectivo sinal de saída. Assim se especificam, por exemplo, os comportamentos proporcional, diferencial e integral dos sistemas (fig. 5).

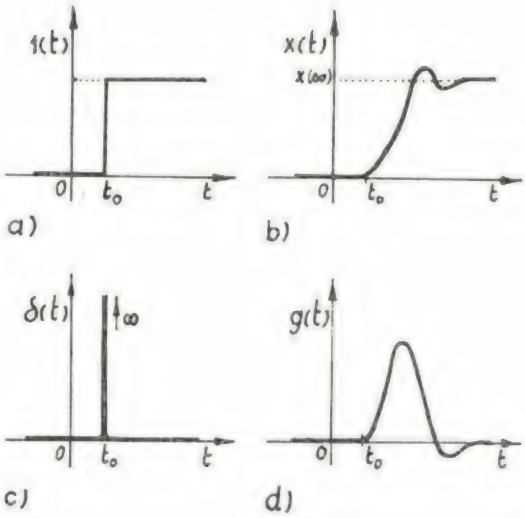



Fig. 4 — Funções de teste (a, c) e respectivas respostas (b, d).

*a*) Função impulsiva unitária;
*b*) Função transição;
*c*) Função impulso ou de Dirac;
*d*) Função peso.

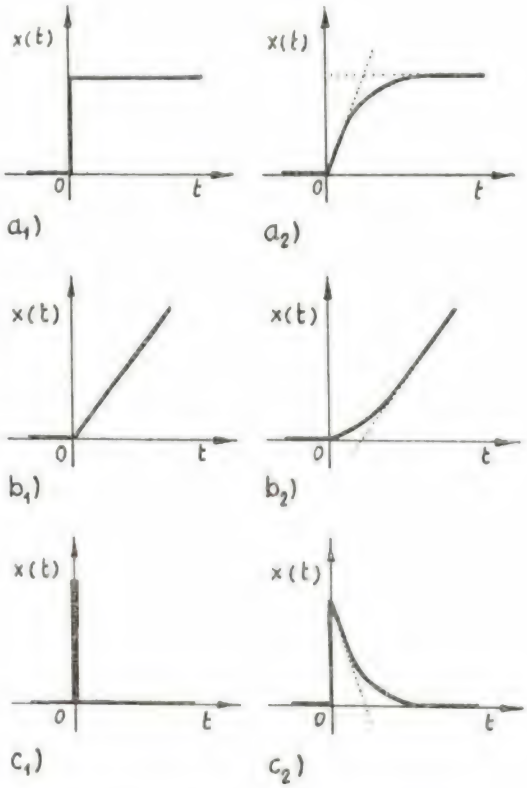



Fig. 5 — Funções transição de sistemas ideais (1) e com atrazo (2).

*a*) Sistema proporcional;
*b*) Sistema integral;
*c*) Sistema diferencial.

Além disso interessa considerar a *função impulso* ou *de Dirac* (fig. 4-c) definida pelas duas condições seguintes

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = t_0 \\ 0 & \text{para } t \neq t_0 \end{cases}$$

e (22)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = f(t_0)$$

sendo então a resposta impulso (fig. 4-d) chamada *função peso* (da teoria das distribuições).

### 3.2. Descrição no domínio imagem s

A aplicação da transformação de Laplace no tratamento do regime de transferência de um sistema apresenta duas vantagens de enorme valor: em primeiro lugar transforma a equação diferencial numa equação algébrica, mais fácil de tratar, e em segundo lugar o sinal de saída obtém-se por meio de operações apenas algébricas (utilizando tabelas). Mas esta transformação implica a mudança do estudo do domínio do tempo t para o *domínio imagem* $s = \sigma + j\omega$ onde, fìsicamente $\sigma$ tem o significado de uma constante de amortecimento e $\omega$ de frequência angular.

A *transformação de Laplace* consiste na transformação da função f(t) no domínio t numa função F (s) no domínio s tal que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t).\ \exp(-st)\, dt \qquad (23)$$

e a *transformação inversa de Laplace*, efectuando a passagem do domínio imagem para o temporal, é definida por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} F(s).\ \exp(st)\, ds,\ t > 0 \qquad (24)$$

Nestas condições, por exemplo, a transformada de Laplace da função impulso de Dirac é igual à unidade

$$\mathcal{L}\{g\,\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t).\ \exp(-st)\, dt = 1 \qquad (25)$$

como se verifica pela definição de $\delta(t)$.

A equação transformada de Laplace (no domínio s) da equação diferencial de um sistema (definida no tempo t) chama-se *equação imagem* do sistema, assumindo a forma, para $t_0 = +0$,

$$\begin{aligned} & a_n \left[ s^n X(s) - x(+0)\, s^{n-1} - x'(+0)\, s^{n-2} - \right. \\ & \qquad \left. - \ldots - x^{n-1}(+0) \right] + \\ & + a^{n-1} \left[ s^{n-1} X(s) - x(+0)\, s^{n-2} - x'(+0)\, s^{n-3} - \right. \\ & \qquad \left. - \ldots - x^{n-2}(+0) \right] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \qquad (26) \\ & + a_2 \left[ s^2 X(s) - x(+0)\, s - x'(+0) \right] + \\ & + a_1 \left[ s X(s) - x(+0) \right] + \\ & + a_0 \left[ X(s) \right] = \\ & = \left[ b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m \right] Y(s). \end{aligned}$$

No caso de um sistema sem energia todas as condições iniciais são nulas e portanto a equação imagem reduz-se a

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)\, X(s) =$$
$$= (b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m)\, Y(s) \qquad (27)$$

definindo-se então a chamada *função de transferência complexa* (na literatura da língua inglesa simplesmente função de transferência)

$$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \qquad (28)$$

que corresponde portanto à função, no domínio imagem, da relação entre as transformadas de Laplace dos sinais de saída e de entrada do sistema com condições iniciais nulas.

Deste modo conclui-se que a função de transferência complexa é uma função racional fraccionária

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n},\ m \leqslant n \qquad (29\text{-a})$$

ou seja, F (s) corresponde à relação de dois polinómios inteiros N (s) e D (s)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}. \qquad (29\text{-b})$$

Os valores de s que anulam a função F (s) dizem-se *zeros* da função de transferência complexa $s_z$ (com $z = 1, \ldots, m$) sendo determinados pelas raízes do numerador

$$N(s) = \sum_{z=o}^{m} b_z s^z = 0 \qquad (30\text{-a})$$

ou

$$N(s) = b_m \prod_{z=1}^{m} (s - s_z) = 0 . \qquad (30\text{-b})$$

Anàlogamente, os *polos* da função de transferência complexa são os valores de s que tornam a função F (s) infinita, correspondendo por conseguinte às raízes $s_p$ (com $p = 1, \ldots, n$) do denominador D (s) tais que

$$D(s) = \sum_{p=o}^{n} a_p s^p = 0 \qquad (31\text{-a})$$

ou $$D(s) = a_n \prod_{p=1}^{n} (s - s_p) = 0 . \qquad (31\text{-b})$$

Em resumo, o regime de transferência do sistema é unìvocamente definido pelo numerador e denominador da função de transferência complexa, isto é

$$F(s) = K . \frac{\prod_{z=1}^{m} (s - s_z)}{\prod_{p=1}^{n} (s - s_p)} \quad , \text{com } K = \frac{b_m}{a_m} . \qquad (32)$$

Considerando o *plano imagem* s definido por um sistema de dois eixos ortogonais, sendo o eixo das abscissas relativo aos valores reais de s (ou seja, $\sigma$) e o eixo das ordenadas em referência aos valores imaginários de s (isto é, $j\omega$), a representação gráfica de F (s) neste plano imagem é traduzida pelos seus polos e zeros (fig. 6-b).

Deste modo no domínio imagem o regime de transferência de um sistema sem enegia é caracterizado pela representação gráfica da função de transferência complexa F (s) no plano imagem s.

Mas interessa conhecer a relação entre a descrição de um sistema nos domínios imagem e do tempo. Para se compreender essa correspondência é fundamental observar que quando o sinal de entrada de um sistema sem energia for a função de teste de Dirac a saída no domínio imagem é igual à função de transferência complexa, pois se $y(t) = \delta(t)$ de (25) vê-se que $Y(s) = 1$ e portanto por (27) será $X(s) = F(s)$.

Nestas condições a função peso representa no tempo o regime de transferência de um sistema

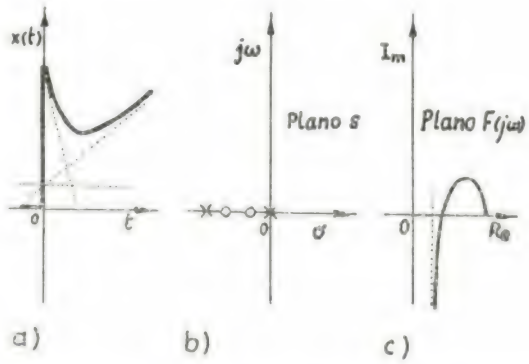



Fig. 6 — Descrição gráfica de um sistema $PID_{T1}$ (proporcional, integral e diferencial com atraso de 1.ª ordem).

*a*) No tempo: por meio da função transição;
*b*) No plano s: através dos zeros e polos de F (s);
*c*) No plano F (j ω): pelo lugar geométrico de F (j ω), ou diagrama polar.

sem energia, pois quando se aplica à entrada do sistema a função de Dirac $\delta(t)$ a saída é a função peso g (t), e como $X(s) = F(s)$ a definição de transformação inversa de Laplace (24) conduz a $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ onde $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = g(t)$ e portanto

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} . \qquad (33)$$

Por outro lado a *convolução* é uma operação em que, num sistema sem energia, permite obter o sinal de saída x (t) relativo a um dado sinal de entrada y (t) através da função peso g (t), ou seja

$$x(t) = g(t) * y(t) \qquad (34\text{-a})$$

deduzindo-se pela definição de transformação inversa de Laplace

$$x(t) = \int_{o}^{t} y(t - \tau)\, g(t)\, d\tau . \qquad (34\text{-b})$$

Assim a convolução traduz no domínio do tempo a multiplicação no domínio imagem, isto

é, a $x(s) = F(s) . Y(s)$ corresponde no tempo $x(t) = g(t) * y(t)$. Este resultado é altamente significativo na interpretação do conceito de função de transferência.

### 3.3. Descrição no domínio complexo Z

Aplicando-se a um sistema sem energia um sinal sinusoidal

$$y(t) = k. \exp(j\omega t) \tag{35}$$

o sinal de saída obtém-se através da convolução

$$x(t) = g(t) * k. \exp(j\omega t) \tag{36-a}$$

ou

$$x(t) = \int_0^t g(\tau). k \exp(j\omega(t-\tau))\, d\tau \tag{36-b}$$

donde

$$x(t) = k. \exp(j\omega t)\left[\int_0^\infty g(\tau). \exp(-j\omega\tau)\, d\tau - \int_t^\infty g(\tau). \exp(-j\omega\tau)\, d\tau\right]. \tag{36-c}$$

Mas para sistemas estáveis em regime estacionário as oscilações são nulas entre t e $\infty$ pelo que o segundo intregal da expressão anterior se anula. Por outro lado o primeiro integral, de acordo com a definição de transformação de Laplace (23), é

$$\int_0^\infty g(\tau). \exp(-j\omega\tau)\, d\tau = F(j\omega) \tag{37}$$

pelo que em sistemas sem energia e estáveis excitados por um sinal sinusoidal $y(t)$ se verifica

$$x(t) = F(j\omega). y(t) \tag{36-d}$$

podendo-se portanto definir a *resposta de frequência* $F(j\omega)$ de um sistema estável sem energia

$$F(j\omega) = \frac{x(t)}{y(t)} \tag{38}$$

sendo $F(j\omega)$ a função que multiplicada por uma excitação sinusoidal aplicada à entrada do sistema reproduz exactamente o sinal de saída em regime estacionário.

A resposta de frequência $F(j\omega)$ equivale a fazer $\sigma = 0$ na função de transferência complexa $F(s)$ pois, por definição de transformação inversa de Laplace (24) e por (37), é $\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = F(j\omega)$ e por outro lado, devido a (33), $\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = F(s)$ o que se verifica apenas quando $\sigma = 0$, ou seja $s = j\omega$. Fazer $s = j\omega$ (ou $\sigma = 0$) corresponde a passar da transformação de Laplace para a transformação de Fourier, o que é possível se as partes reais de todos os polos da função $F(s)$ forem negativas, isto é, como se estabeleceu, o sistema terá de ser estável.

A resposta de frequência é uma função complexa, constituída por parte real Re e parte imaginária Im

$$F(j\omega) = \mathrm{Re} + j\,\mathrm{Im} \tag{39}$$

quer dizer, a representação gráfica desta função efectua-se no plano complexo de Cauchy, obtendo-se o *lugar geométrico de $F(j\omega)$* no plano complexo (fig. 6-c), que se designa *diagrama polar*.

No domínio complexo o regime de transferência de um sistema estável sem energia é pois caracterizado pela representação da resposta de frequência $F(j\omega)$no plano do domínio complexo.

Fìsicamente a função $F(j\omega)$ equivale a uma variação de amplitude do sinal de entrada

$$A(\omega) = |F(j\omega)| \tag{40}$$

e a uma deslocação de fase

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arc\ tg}\, \frac{I_m(F(j\omega))}{R_e(F(j\omega))} \tag{41}$$

cujas representações gráficas, em escalas convenientes, reproduzem o chamado *diagrama de Bode* do sistema.

## 4. DESCRIÇÃO DE SISTEMAS ATRAVÉS DO SEU ESTADO DINÂMICO

### 4.1. Descrição no domínio do tempo

Designa-se *variável de estado* $u(t)$ de um sistema toda a grandeza variável interior do sistema que especifica o seu estado de excitação, de tal modo escolhida que depende apenas dos sinais de entrada e ou de outras variáveis de estado. É claro que o processamento dinâmico de um sistema é independente da escolha das variáveis de estado.

O processamento dinâmico de um sistema e dos seus terminais pode ser descrito através das variáveis de estado por intermédio das chamadas *equações dinâmicas* do sistema [2], que para múltiplas entradas e saídas se exprimem por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{y}(t) \end{aligned} \qquad (42)$$

sendo **A**, **B**, **C** e **D** matrizes coeficientes e **u** (t), **y** (t) e **x** (t) vectores relativos respectivamente às variáveis de estado, sinais de entrada e sinais de saída.

No caso particular de sistemas apenas com uma entrada e uma saída as matrizes **y** (t), **x** (t), **B** e **D** são escalares y (t), x (t), b e d.

As equações dinâmicas podem representar-se por um esquema de blocos (fig. 7-a) onde se observa perfeitamente a natureza de cada uma das matrizes e grandezas variáveis.

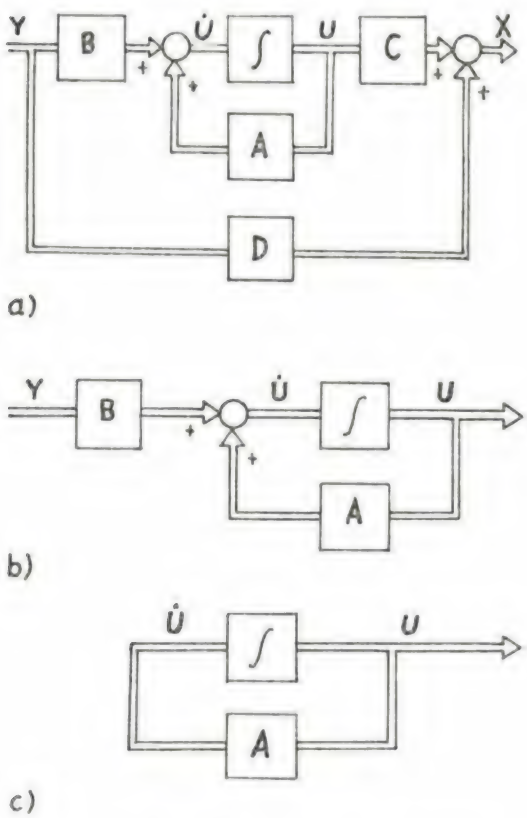



Fig. 7 — Esquema de blocos de um sistema.

*a*) Das equações dinâmicas,
*b*) Da equação de estado dum sistema linear forçado;
*c*) Da equação de estado dum sistema livre.

De facto as matrizes-coeficientes das equações dinâmicas têm um significado bem específico:

*a*) A *matriz estrutural* ou *interna* **A** (quadrática de ordem n, sendo n o número de armazenadores de energia do sistema) define por si só a dinâmica interna do sistema, isto é, o seu movimento próprio. Equivale ao denominador da função de transferência complexa.

*b*) A *matriz de comando* ou *de entrada* **B** (de ordem n.p, onde p é o número de sinais de entrada do sistema) indica como os sinais de entrada **y** (t) do sistema excitam.

*c*) A *matriz de observação* ou *de saída* **C** (de ordem q.n, para o número de terminais de saída q) caracteriza essencialmente a transferência do estado interno do sistema para os terminais de saída (pode interromper-se internamente o sistema, deixando de se observar sinais de saída, apenas com o anulamento da matriz **C**).

*d*) A *matriz de travessia* **D** só não é nula se a correspondente função de transferência complexa F (s) do sistema tiver tantos zeros como polos (se $\lim_{s \to \infty} F(s) \neq 0$). Num sistema técnico (real) é **D** = **0** pois não existe nenhum sistema que dê um sinal de resposta para $\omega \longrightarrow \infty$.

O vector das variáveis de estado

$$\mathbf{u}(t) = \left[ u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t) \right]^T \qquad (43)$$

pode ser interpretado como definindo uma *trajectória* no espaço de estado n-dimensional $R^n$ (fig. 8). Neste sentido as equações dinâmicas do sistema representam equações vectoriais que indicam como o vector velocidade

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \left[ \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \ldots, \dot{u}_n(t) \right]^T \qquad (44)$$

depende do vector lugar geométrico **u** (t). O espaço de movimentos engloba ainda o eixo dos tempos.

Conforme os elementos das matrizes-coeficientes assim se definem os diferentes tipos de sistemas: se são funções do tempo o sistema diz-se de tempo-não-invariante, se são constantes (reais ou não) trata-se de um sistema de tempo invariante e se são reais o sistema é linear. Vê-se assim que os programas de cálculo analógico ou digital dos sistemas lineares são essencialmente simplificados.

No caso de um *sistema não linear* será

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A(u,t)\ u(t) + B(u,t)\ y(t) \\ x(t) &= C\ u(t) + D\ y(t). \end{aligned} \qquad (45)$$

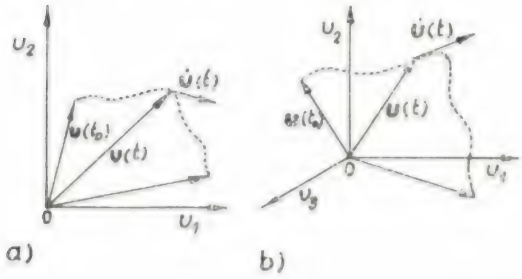



Fig. 8 — Representação gráfica das equações dinâmicas de um sistema como uma trajectória.
*a*) Sistema de 2.ª ordem;
*b*) Sistema de 3.ª ordem.

Num *sistema livre*, sem perturbação externa, $y(t) \equiv 0$ para $t \geq t_0$, pelo que as suas equações dinâmicas degeneram em

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A\ u(t) \\ x(t) &= C\ u(t). \end{aligned} \qquad (46)$$

A equação que descreve o regime dinâmico de um sistema, caracterizando o seu estado em cada instante, chama-se *equação de estado* do sistema (fig. 7-b), que no caso *linear e de tempo dependente* (não invariante) é

$$\dot{u}(t) = A\ u(t) + B\ y(t) \qquad (47\text{-a})$$

$$\dot{u}(t) = f(u(t), y(t), t) \qquad (47\text{-b})$$

e no caso de um sistema *livre* (fig. 7-c) assume a forma simples

$$\dot{u}(t) = A\ u(t) \qquad (48\text{-a})$$

ou

$$\dot{u}(t) = f(u(t), t) \qquad (48\text{-b})$$

simplificando-se ainda mais se o sistema for *autónomo*, pois além de não ter excitações de entrada é de tempo invariante,

$$\dot{u}(t) = f(u(t)) \qquad (49)$$

sendo o sistema *estacionário* ou *de tempo invariante* em geral

$$\dot{u}(t) = f(u(t), y(t)) \qquad (50)$$

onde f é uma função qualquer, podendo não ser linear (definição de sistema não linear).

A integração da equação de estado linear (47-a) pode fazer-se através da *matriz de transição* ou *fundamental*

$$\Phi(t) = \exp(A\,t) \qquad (51)$$

e com as condições iniciais $u_0 = u(t_0)$, pois de (47-a)

$$\frac{d\,u(t)}{dt} - A\,u(t) = B\,y(t) \qquad (47\text{-c})$$

multiplicando à esquerda ambos os membros por $\Phi(t)$ e porque

$$\frac{d}{dt}(\exp(-A\,t)\,.\,u(t)) = \exp(-A\,t)\,.\,\frac{d\,u(t)}{dt} - A\exp(-A\,t).\,u(t) \qquad (52)$$

e devido à comutatividade

$$A\,\Phi = \Phi\,A \qquad (53)$$

resulta, após integração de ambos os membros entre $t_0$ e $t$ e supondo as condições iniciais $u_0 = u(t_0)$,

$$\exp(-A\,t)\,.\,u(t) - \exp(-A\,t_0).\,u(t_0) = \int_{t_0}^{t} \exp(-A\,\tau)\,.\,B\,y(\tau)\,d\tau \qquad (54\text{-a})$$

e multiplicando à esquerda ambos os membros por $\Phi(t)$

$$u(t) = u_0\,.\,\exp(A(t-t_0)) + \int_{t_0}^{t} \exp(A(t-t_0))\,.\,B\,y(\tau)\,d\tau \qquad (54\text{-b})$$

onde a primeira parcela traduz o movimento próprio do sistema de $t = -\infty$ até $t = t_0$ e a segunda parcela corresponde à convolução das grandezas de entrada $B\,Y(t)$, representando portanto o movimento forçado do sistema, isto é, a variação de estado do sistema de $t_0$ até ao instante de observação t devida ao sinal de entrada. Deste modo a transição dos estados do sistema é dada pela sobreposição linear dos fenómenos transitórios devidos às condições iniciais e à resposta do sistema ao sinal de excitação externa $B\,Y(t)$.

### 4.2. Descrição no domínio imagem

A aplicação da transformação de Laplace às equações dinâmicas de um sistema linear e de tempo invariante conduz às *equações dinâmicas imagem*

$$\begin{aligned} s\,U(s) - u(t_0) &= A\,U(s) + B\,Y(s) \\ X(s) &= C\,U(s) + D\,Y(s). \end{aligned} \qquad (55)$$

Na hipótese dos sistemas sem energia, em que $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{0}$, pode eliminar-se o vector $\mathbf{U}(s)$ das variáveis de estado no domínio imagem, admitindo que existe a matriz inversa de $\mathbf{C}$, pois da segunda equação $\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X}(s) - \mathbf{D}\mathbf{Y}(s))$ e por substituição na primeira

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X}(s) - \mathbf{D}\mathbf{Y}(s)) = \mathbf{B}\mathbf{Y}(s). \qquad (56\text{-a})$$

Definindo-se a *matriz característica imagem*

$$\mathbf{Q}(s) = s\mathbf{I} - \mathbf{A}, \qquad (57)$$

à qual se refere o *polinómio característico*

$$Q(s) = s\ |\mathbf{I} - \mathbf{A}|\ , \qquad (58)$$

existe a matriz inversa

$$\mathbf{Q}^{-1}(s) = \frac{\mathbf{Q}(s)_{adj}}{Q(s)} \qquad (59)$$

desde que $Q(s)$ seja não singular, isto é, se o polinómio característico não for nulo ($\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$).

Nestas condições, multiplicando sucessivamente à esquerda ambos os membros da equação (56) por $\mathbf{Q}^{-1}(s)$ e por $\mathbf{C}^{-1}$, obtém-se

$$\mathbf{X}(s) = (\mathbf{C}\,\mathbf{Q}^{-1}(s)\,\mathbf{B} + \mathbf{D})\,\mathbf{Y}(s) \qquad (56\text{-b})$$

ou, definindo a *matriz de transferência complexa* do sistema sem energia relativa ao seu regime dinâmico e dos seus terminais

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{X}(s)}{\mathbf{Y}(s)} \qquad (57\text{-a})$$

será

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}\,\mathbf{Q}^{-1}(s)\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\ . \qquad (57\text{-b})$$

Anàlogamente se deduz a *equação de estado imagem* de um sistema linear de tempo invariante, com quaisquer condições iniciais, supondo que a matriz característica imagem é não singular

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{Q}^{-1}(s)\,.\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{Y}(s) \qquad (58)$$

que se pode transformar no domínio do tempo

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0\,.\,\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Q}^{-1}(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Q}^{-1}(s)\,\mathbf{B}\mathbf{Y}(s)\} \qquad (59)$$

expressão que comparada com (54-b) conduz à conclusão que existe uma relação unívoca entre a matriz de transição $\Phi(t)$ no dominio do tempo e a matriz característica imagem $\mathbf{Q}(s)$ no domínio imagem

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Q}^{-1}(s)\} \qquad (60)$$

## 5. CONCLUSÕES

Pela importância do seu significado destacam-se os seguintes resultados expostos no decorrer do estudo:

1.º Normalmente a análise dos sistemas de controle é efectuada supondo os sistemas lineares e de tempo-invariante. Para a compreensão das condições de estudo deverá ter-se presente que um sistema pode ser função do tempo e nestas circunstâncias mesmo em sistemas lineares não se verifica a invariância do tempo, continuando porém a constatar-se as leis de sobreposição e de homogeneidade. Nos sistemas não lineares por seu lado apenas se pode verificar a invariância do tempo (Quadro I).

| Sistema | Linear | Não linear |
|---|---|---|
| Independente do tempo | Sobreposição<br>Homogeneidade<br>Invariância do tempo | Invariância do tempo |
| Dependente do tempo | Sobreposição<br>Homogeneidade | — |

Quadro I — Características de sistemas linear e não linear em função do tempo.

2.º Existem dois processos distintos para descrever um sistema: através do regime de transferência ou por meio do seu estado dinâmico. Por outro lado é importante observar que o mesmo sistema se pode descrever em três domínios diferentes: tempo, imagem e complexo. Cada modo de descrição (Quadro II) goza de propriedades mais ou menos vantajosas de acordo com o tipo de sistema.

3.º A equação diferencial de um sistema define-se pela linearização do sistema em torno do ponto de trabalho, traduzindo os *desvios em relação ao ponto estacionário de trabalho*, e equivale à identificação dos regimes de transferência dos terminais de entrada e de saída, pelo que *a definição no tempo de um sistema através do processamento*

| Processo de descrição | Regime de transferência | | | Estado do sistema | |
|---|---|---|---|---|---|
| Domínio | Tempo<br>t | Imagem<br>$s = \sigma + j\omega$ | Complexo<br>$z = Re + jI_m$ | Tempo<br>t | Imagem<br>s |
| Modo de descrição | Equação diferencial<br>$E(x,x',\ldots,x^{(n)}) = R(y,y',\ldots,y^{(m)})$ | Função de transferência complexa<br>$F(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$ | Resposta de frequência<br>$F(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}$ | Equação de estado<br>$\dot{u} = f(u,y,t)$ | Matriz de transferência complexa<br>$F(s)$ |
| Restrições do sistema | Linear | Linear<br>Tempo — inv.<br>Sem energia | Linear<br>Tempo — inv.<br>Sem energia<br>Estável | — | Linear<br>Tempo — inv.<br>Sem energia |

Quadro II — Descrição de sistemas.

*de transferência refere-se sòmente aos terminais* e não à estrutura do sistema.

4.° O regime de transferência é representado no tempo pela função peso g (t), no domínio imagem pela função de transferência complexa e no domínio complexo pela resposta de frequência $F(j\omega)$.

5.° De um modo genérico a equação imagem de um sistema contém os valores iniciais relativos às diferentes transformadas de Laplace da equação diferencial, que se devem anular para se poder definir a função F(s), quer dizer, a *função de transferência complexa é apenas definível em sistemas sem energia,* o que significa que a definição no domínio imagem s por intermédio do processamento de transferência só é possível se as condições iniciais do sistema forem nulas.

6.° Por sua vez a descrição de sistemas no domínio complexo exige que os sistemas sejam sem energia (pois só assim se pode aplicar a convolução) mas *exige ainda a estabilidade do sistema* (para que de facto a convolução conduza à resposta de frequência). Note-se que sob o ponto de vista formal é costume porém definir-se por analogia, nos sistemas instáveis, numa função $F(j\omega)$ muito embora não se possa medir. Importa ainda observar que $F(j\omega)$ *não é uma função imagem* mas sim uma função complexa.

7.° As *equações dinâmicas descrevem o comportamento dos sistemas e dos seus terminais,* enquanto as *equações de estado descrevem o comportamento dos sistemas.* Com esta consideração a equação de estado descritiva dos sistemas tem uma forma muito simples, podendo simplificar-se sucessivamente nos casos de sistemas lineares, livres, autónomos e ainda de tempo invariante (Quadro III).

| Sistema | Equação de estado |
|---|---|
| Linear | $\dot{u} = f(u, y, t)$ |
| Livre | $\dot{u} = f(u, t)$ |
| Tempo-inv. | $\dot{u} = f(u, y)$ |
| Autónomo | $\dot{u} = f(u)$ |

Quadro III — Equações de estado de sistemas.

8.° *A descrição no domínio imagem por meio dos estados do sistema não exige que o sistema seja sem energia,* vantagem de elevado teor em relação à descrição através do regime de transferência visto que nalguns casos especiais da técnica de controle não é possível anular as condições iniciais. Anàlogamente *a matriz de transferência complexa não exige estabilidade do sistema.*

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] — F. FRAUNBERGER: Regelungstechnik, Grundlagen und Anwendungen; B. G. Teubner, Stuttgart (1967)

[2] — A. SCHWARZ: Einfuehrung in die moderne Systemtheorie; Vieweg, Braunschweig (1969).

# HERÓIS DA LUBRIFICAÇÃO

## *Audacius*

Toda a gente sabe (e se Você é Helena ainda tem mais razão para saber...) que foram os gregos os vencedores da guerra de Tróia.

Mas o que quase todos ignoram é que foi um chefe de manutenção quem, pràticamente, deu a vitória aos gregos.

Ulisses, cuja vida acabaria por ser uma verdadeira odisseia, nós diríamos, até, a verdadeira Odisseia, comandava o exército grego. Um exército, nesse tempo, era principalmente formado por infantaria, quer dizer, por tropas a pé. Daí o conhecido aforismo «debaixo dos pés se levantam os trabalhos». Mas Ulisses, que já andava farto de trabalhos (recordam-se da expressão «os trabalhos de

## Audacius

Hércules»? Pois vamos aplicá-la, com muito mais propriedade, a Ulisses...), teve uma ideia que só um grande manhoso poderia segregar e acariciar: levar os troianos à certa metendo-lhes em casa, sem dar cavaco, um cavalo de pau. A ideia de Ulisses estava a caminho e acabaria por entrar, com um pé na História, outro na Lenda, no espólio cultural de todos nós.

Mas da ideia à prática, o Cavalo nem um «salto» deu. Era tão pesado que não conseguia mover-se sobre as suas rodas de ferro. Experimentaram tirar-lhe o recheio de bem nutridos guerreiros gregos. Vazio, o Cavalo de Pau também não se movia.

Então Ulisses consultou Audácius, o seu chefe de manutenção da época. Audácius foi categórico: era um problema de lubrificação. «Mas o problema não se resume à compra de lubrificantes», avisou, de dedo engordurado no ar, o industrioso Audácius. «Temos de descobrir qual é o lubrificante indicado para cavalos de pau».

Audácius folheou a sua papelada, que nesse tempo era de pergaminho, e finalmente escolheu MOBIL.

A MOBIL não era o único fornecedor de lubrificantes que havia na Grécia, mas Audácius sabia que os homens da MOBIL eram peritos qualificados em todos os tipos de engenhos.

Chegou um Delegado da MOBIL e logo iniciou os seus trabalhos para livrar de trabalhos Ulisses, o tal cuja vida foi uma verdadeira trabalheira. Começou por extrair de sob a sua toga um volumoso maço de pergaminhos que tinha por título «Manual dos Lubrificantes de Máquinas».

Com o dedo espetado procurou no índice — «Cavalo de Pau». A recomendação para eixos era a Massa Lubrificante XVI — «Sovarex-Heavy Duty».

Audácius aplicou a massa nos eixos.

E nessa noite, com os troianos a empurrarem para dentro da sua própria casa o cavalo que pela calada havia de os escoucear, os gregos entraram em Tróia e mais uma página da História foi escrita.

Hoje em dia, os agentes de compras como Audácius, procuram não só bons produtos, mas também boa assistência.

Por exemplo: o «Manual dos Fabricantes de Máquinas» é o guia de que os Delegados da Mobil se servem para recomendarem o lubrificante mais adequado a cada órgão de uma máquina. Este valioso livro contém uma relação dos mais importantes fabricantes de máquinas industriais e descreve os equipamentos por eles fabricados. Para cada parte móvel dessas máquinas há uma recomendação especial de lubrificação.

Não é preciso um sujeito chamar-se Audácius para saber como orientar-se na recomendação dos lubrificantes MOBIL.



LITO PROGRESSOR

C. D. U. 628.543.36

# TRATAMENTO DE RESÍDUOS

por J. SARAFANA

RESUMO

*O aumento da produção de resíduos obriga a estudar novos métodos de tratamento e a melhorar os existentes.*

*Este artigo descreve o estado actual do problema e estuda alguns processos sob o ponto de vista económico.*

SYNOPSIS

*Rapid depletion of disposal areas makes imperative to develop new approaches for handling wastes and to improve established methods.*

*This paper looks for the state-of-the-art and studies some models under the economic point of view.*

## 1 — INTRODUÇÃO

O tratamento da água poluída dá origem a resíduos que é necessário armazenar em pura perda de espaço, ou transportar para locais mais espaçosos, como o oceano.

O crescimento das quantidades de resíduos formadas num dado intervalo de tempo aumenta extraordinàriamente à medida que aumentam o nível de vida e a industrialização, necessitando-se de novos métodos para que a área disponível não seja em pouco tempo exígua.

O transporte destes resíduos é caro e por isso a hipótese de redução de volume tem-se apresentado como a mais tentadora para a resolução do problema do armazenamento de resíduos.

No entanto, à maior redução de volume, corresponde naturalmente um maior custo, pelo que este valor terá que ser compensado pelos custos de transporte e armazenamento.

Como exemplo observe-se o diagrama da figura 1 preparado pela firma americana na Syska & Hennessy para um hospital com 600 camas produzindo por dia cerca de 14 toneladas de resíduos sólidos correspondentes a 190 $m^3$/dia.

Nela estão indicados os vários processos considerados. A escolha do processo mais económico

EVOLUÇÃO DOS CUSTOS INICIAIS E OPERATÓRIOS COM O AUMENTO DA REDUÇÃO DE VOLUME

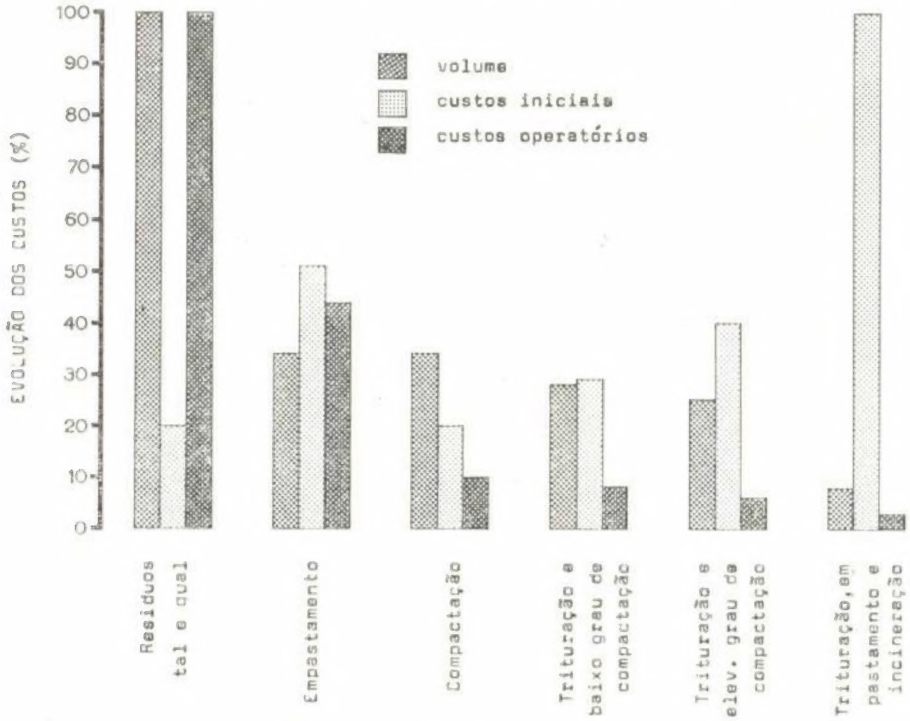



Fig. 1